

Primers for Metabolic Control Analysis

YUGI, Katsuyuki
Kuroda Lab., The University of Tokyo

初期の試み

- 「律速酵素」の発現量を増やす
 - 流束は上がらず
- 成功しなかった理由は？
 - 「律速酵素」の定義が経験的
 - 研究者によって「律速酵素」が異なる
- 「律速」の度合いを定量化する指標
 - Metabolic Control Analysis (MCA) の登場

MCA (Metabolic Control Analysis)

- 「律速」の度合いを定量化する指標を導入
 - 流束制御係数 (Flux Control Coefficient)

$$C_{v_1}^J = \frac{v_1}{J} \frac{\partial J}{\partial v_1}$$

- 反応速度 v_1 が1%増えたとき流束 J は何%増えるか
- $C^J=1$ を「律速酵素(rate limiting enzyme)」と定義

Kacser and Burns (1973), Heinrich and Rapoport (1974)

流束制御係数の加法定理

- Summation Theorem

$$\sum_{i=1}^n C_{v_i}^J = 1$$

- 流束Jに影響するすべての C^J の総和は1 (=100%)
- 限られた C^J を複数の酵素で分け合っている
- MCA学派の主張
 - 「律速酵素は存在しない」
 - $C^J=1$ となる酵素を「律速」と定義する限りにおいて正しい

加法定理の証明 (1/2)

- 流束の全微分を考える

$$dJ = \frac{\partial J}{\partial v_1} dv_1 + \frac{\partial J}{\partial v_2} dv_2 + \cdots + \frac{\partial J}{\partial v_n} dv_n$$

- 両辺で割り、右辺の各項に v_n / v_n をかける

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{J} &= \frac{v_1}{J} \frac{\partial J}{\partial v_1} \frac{dv_1}{v_1} + \frac{v_2}{J} \frac{\partial J}{\partial v_2} \frac{dv_2}{v_2} + \cdots + \frac{v_n}{J} \frac{\partial J}{\partial v_n} \frac{dv_n}{v_n} \\ &= C_{v_1}^J \frac{dv_1}{v_1} + C_{v_2}^J \frac{dv_2}{v_2} + \cdots + C_{v_n}^J \frac{dv_n}{v_n} \end{aligned}$$

加法定理の証明 (2/2)

- $v_1 \sim v_n$ を同じ割合 α だけ増やすと、 J も α だけ増加する。

$$\alpha = \frac{dJ}{J} = \frac{dv_1}{v_1} = \frac{dv_2}{v_2} = \dots = \frac{dv_n}{v_n}$$

- よって

$$\frac{dJ}{J} = C_{v_1}^J \frac{dv_1}{v_1} + C_{v_2}^J \frac{dv_2}{v_2} + \dots + C_{v_n}^J \frac{dv_n}{v_n}$$

$$\alpha = \alpha C_{v_1}^J + \alpha C_{v_2}^J + \dots + \alpha C_{v_n}^J$$

MCAの3大指標

- 流束制御係数

$$C_{v_1}^J = \frac{v_1}{J} \frac{\partial J}{\partial v_1}$$

- 濃度制御係数

Concentration Control
Coefficient

- 反応速度が細胞内基質濃度に与える影響

$$C_{v_1}^S = \frac{v_1}{[S]} \frac{\partial [S]}{\partial v_1}$$

- 弾力性係数

Elasticity

- 基質濃度が反応速度に与える影響

$$\epsilon_S^{v_1} = \frac{[S]}{v_1} \frac{\partial v_1}{\partial [S]}$$

流束制御係数の結合定理

- Connectivity Theorem

$$\sum_{i=1}^n C_{v_i}^J \varepsilon_S^{v_i} = 0$$

- 局所的な要素と大域的な性質との関係
 - 弾力性と流束
- ε が小さい酵素
 - 基質濃度に影響されにくい
 - 高い C^J を持つ傾向がある

結合定理の証明 (1/3)

- 反応速度の全微分を考える

$$dv_i = \frac{\partial v_i}{\partial E} dE + \frac{\partial v_i}{\partial S_j} dS_j$$

- これを変形 ($v_i \propto E$ より $v_i = kE$ とおいた)

$$\frac{dv_i}{v_i} = \frac{E}{v_i} \frac{\partial v_i}{\partial E} \frac{dE}{E} + \frac{S_j}{v_i} \frac{\partial v_i}{\partial S_j} \frac{dS_j}{S_j}$$

$$= \frac{1}{k} k \frac{dE}{E} + \varepsilon_{S_j}^{v_i} \frac{dS_j}{S_j}$$

$$\frac{dv_i}{v_i} = \frac{dE}{E} + \varepsilon_{S_j}^{v_i} \frac{dS_j}{S_j}$$

結合定理の証明 (2/3)

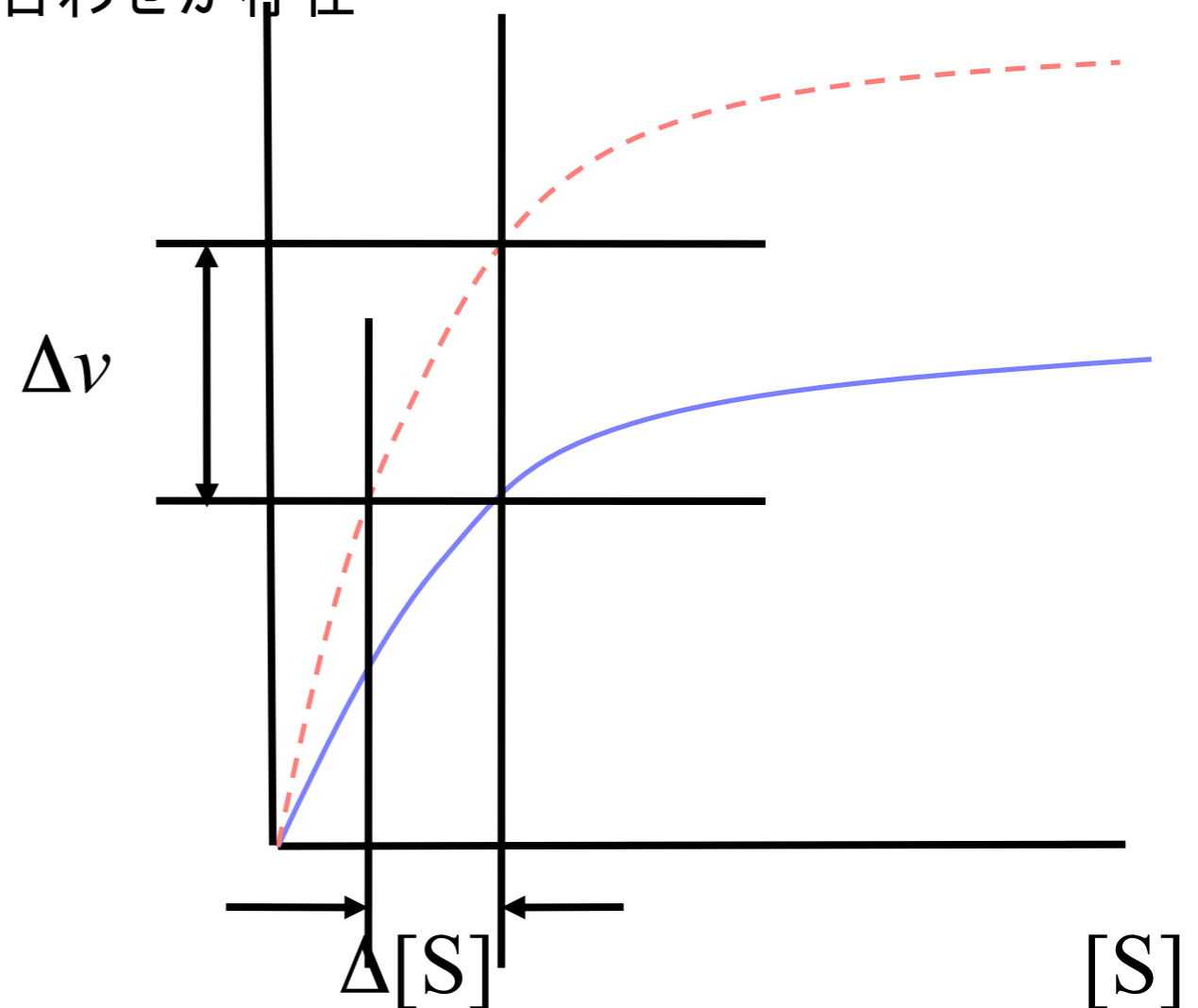
- 酵素濃度増、基質濃度増による効果
 - 打ち消しあって $dv_i=0$ になる組み合わせが存在

- すなわち、先ほど導いた

$$\frac{dv_i}{v_i} = \frac{dE}{E} + \varepsilon_{S_j}^{v_i} \frac{dS_j}{S_j}$$

より、

$$0 = \frac{dE}{E} + \varepsilon_{S_j}^{v_i} \frac{dS_j}{S_j}$$



結合定理の証明 (3/3)

$$\frac{dJ}{J} = C_{v_1}^J \frac{dv_1}{v_1} + C_{v_2}^J \frac{dv_2}{v_2} + \dots + C_{v_n}^J \frac{dv_n}{v_n}$$

$$0 = \frac{dE}{E} + \varepsilon_{S_j}^{v_i} \frac{dS_j}{S_j} \text{ および } dJ = dv_1 = \dots = dv_n = 0 \text{ を代入}$$

↓ $(v_i \propto E_i \text{ より } v_i = k_i E_i \text{ とおく})$

$$0 = C_{v_1}^J \left(-\varepsilon_{S_j}^{v_1} \frac{dS_j}{S_j} \right) + \dots + C_{v_n}^J \left(-\varepsilon_{S_j}^{v_n} \frac{dS_j}{S_j} \right)$$

$$\left(\frac{dv_i}{v_i} = \frac{k_i}{k_i} \frac{dE_i}{E_i} = \frac{dE_i}{E_i} \right)$$

$$0 = C_{v_1}^J \varepsilon_{S_j}^{v_1} + \dots + C_{v_n}^J \varepsilon_{S_j}^{v_n}$$

基質濃度制御係数の定理

- 加法定理

$$\sum_{i=1}^n C_{v_i}^S = 0$$

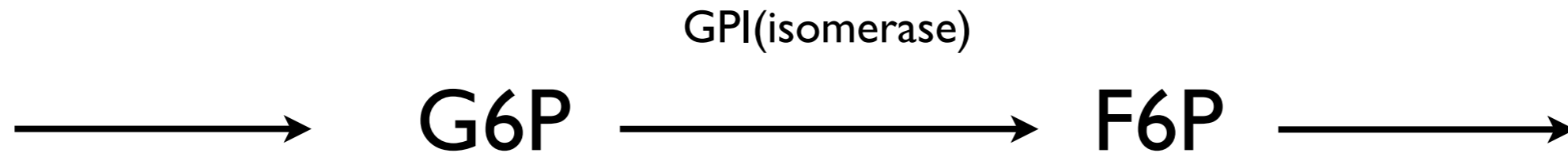
- 結合定理

$$\sum_{i=1}^n C_{v_i}^{S_j} \varepsilon_{S_k}^{v_i} = -\delta_{jk}$$

- 証明は省略

係数の測定法

- ε : ダブルモジュレーション法



$$dJ = \frac{\partial v_{\text{GPI}}}{\partial [\text{G6P}]} d[\text{G6P}] + \frac{\partial v_{\text{GPI}}}{\partial [\text{F6P}]} d[\text{F6P}]$$

- [Glucose]増加時の[G6P]、[F6P]、流束]の変化量を測定
 - 上の実験を2回行くと、 ε の2元1次連立方程式を得る
-
- C^J : (方法1) 菌体抽出液に精製酵素を添加
(方法2) ε を求め、結合定理を適用

演習 I

- ある細胞の解糖系についてダブルモジュレーション実験を行い、下記のようなデータを得た。 ε を求めなさい。

コントロール

$$[\text{G6P}] = 80 \mu\text{M}, [\text{F6P}] = 12 \mu\text{M}, v_{\text{GPI}} = 2400 \mu\text{M}/\text{min}$$

$\Delta[\text{Glucose}] = 1.0 \text{mM}$ のとき

$$[\text{G6P}] = 88 \mu\text{M}, [\text{F6P}] = 15 \mu\text{M}, v_{\text{GPI}} = 2440 \mu\text{M}/\text{min}$$

$\Delta[\text{Glucose}] = 2.0 \text{mM}$ のとき

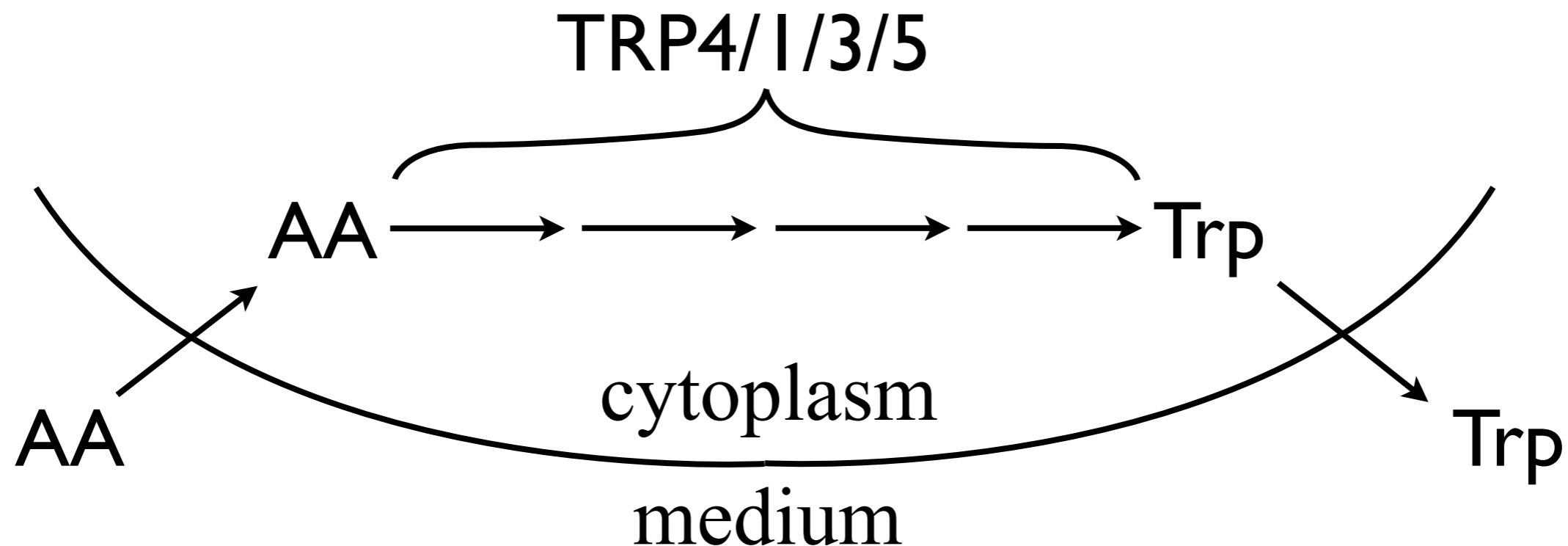
$$[\text{G6P}] = 90 \mu\text{M}, [\text{F6P}] = 14 \mu\text{M}, v_{\text{GPI}} = 2520 \mu\text{M}/\text{min}$$

今日の内容

- 代謝流束 (flux) の定義
- 代謝制御解析 (Metabolic Control Analysis)
 - 係数いろいろ
 - 加法定理、結合定理
- 代謝工学への応用
 - 酵母トリプトファン合成の収率向上

MCAを代謝工学に応用

- 酵母トリプトファン合成の収率向上
- Niederberger, P. et al. “A strategy for increasing an *in vivo* flux by genetic manipulations”, *Biochem. J.* 287:473-9, 1992.
- 培地のAnthranilic acid (AA) を取り込んでTrp生産



MCAに基づく生産効率向上

- C^J が比較的大きい酵素5つ
 - Anthranilate synthetase (TRP3C, $C^J=0.018$)
 - phosphoribosyltransferase (TRP4, $C^J=0.174$)
 - phosphoribosylanthranilate isomerase (TRP1, $C^J=0.013$)
 - indoleglycerol phosphate synthase (TRP3B, $C^J=0.013$)
 - tryptophan synthase (TRP5A, $C^J=0.040$)
- これら5つをコードしたプラスミドを形質転換
 - Trp 生産の流束 8.8 倍
 - 酵素1つだけでは 1.0-1.3倍

MCAとロバストネス

- MCAの結論
 - 流束を制御する酵素は分散している
- 近年、ロバストネスの一種として解釈
 - 制御を分散はダメージコントロールを高める
 - 1酵素の点変異くらいなら流束を保てる

行列表記への拡張

- 今までの議論
 - 一直線の代謝経路のみ
- 実際の代謝系
 - いたるところに分岐点
- 分岐点のある経路でもMCAを使いたい
 - 代謝系を行列で表現するとうまくいく
 - MCAの基本方程式 (今日のゴール)

MCAの基本方程式

$$\begin{pmatrix} \text{non} \mathbf{C}^J \\ \text{non} \mathbf{C}^S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{K} & \text{non} \varepsilon \mathbf{L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{L} \end{pmatrix}$$

- \mathbf{C}^J 、 \mathbf{C}^S 、 ε はそれぞれの係数からなる行列
 - “non” は正規化されていないことを表す
- \mathbf{K} は零行列。 \mathbf{L} はこれから紹介。

C_J、C_S、εの中身

$$C_J = \begin{pmatrix} C_{v_1}^{J_1} & C_{v_2}^{J_1} & \dots & C_{v_n}^{J_1} \\ C_{v_1}^{J_2} & C_{v_2}^{J_2} & & C_{v_n}^{J_2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ C_{v_1}^{J_m} & C_{v_2}^{J_m} & \dots & C_{v_n}^{J_m} \end{pmatrix}$$

$$C_S = \begin{pmatrix} C_{v_1}^{S_1} & C_{v_2}^{S_1} & \dots & C_{v_n}^{S_1} \\ C_{v_1}^{S_2} & C_{v_2}^{S_2} & & C_{v_n}^{S_2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ C_{v_1}^{S_k} & C_{v_2}^{S_k} & \dots & C_{v_n}^{S_k} \end{pmatrix}$$

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_{S_1}^{v_1} & \epsilon_{S_2}^{v_1} & \dots & \epsilon_{S_k}^{v_1} \\ \epsilon_{S_1}^{v_2} & \epsilon_{S_2}^{v_2} & & \epsilon_{S_k}^{v_2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \epsilon_{S_1}^{v_n} & \epsilon_{S_2}^{v_n} & \dots & \epsilon_{S_k}^{v_n} \end{pmatrix}$$

分子が行ラベル、
分母が列ラベル

Link matrix

- \mathbf{N} の線形独立な行を上側に寄せる

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} \mathbf{N}^0 \\ \mathbf{N}' \end{pmatrix} = \mathbf{L}\mathbf{N}^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{\text{rank}(\mathbf{N})} \\ \mathbf{L}' \end{pmatrix} \mathbf{N}^0$$

- 上式の \mathbf{L} をLink matrixと呼ぶ

Link matrixの例

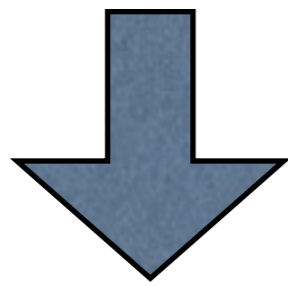
$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{N}^0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

線形従属

$$\mathbf{N} = \mathbf{L}\mathbf{N}^0 \quad \text{より} \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

MCAの基本方程式

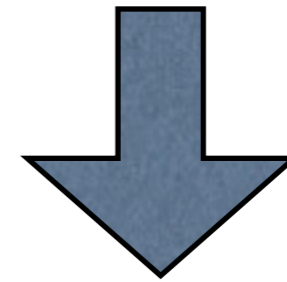
$$\begin{pmatrix} \text{non } \mathbf{C}^{\mathbf{J}} \\ \text{non } \mathbf{C}^{\mathbf{S}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{K} & \text{non } \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{L} \end{pmatrix}$$



加法定理

$$\text{non } \mathbf{C}^{\mathbf{J}} \mathbf{K} = \mathbf{K}$$

$$\text{non } \mathbf{C}^{\mathbf{S}} \mathbf{K} = \mathbf{0}$$



結合定理

$$\text{non } \mathbf{C}^{\mathbf{J}} \text{non } \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{L} = \mathbf{0}$$

$$\text{non } \mathbf{C}^{\mathbf{S}} \text{non } \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{L} = -\mathbf{L}$$

準備1: 2変数の合成関数の微分公式

- $z=f(x,y)$ において $x=g(u,v)$ 、 $y=h(u,v)$ で表されるとき

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}$$
$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}$$

準備2: C^S の行列表記

$$\mathbf{N} \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{S}} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{E}} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{E}} \right) = 0$$

$$\mathbf{N} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{S}} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}} = -\mathbf{N} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{E}}$$

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}} = - \left(\mathbf{N} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{S}} \right)^{-1} \mathbf{N} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{E}}$$

両辺に $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{v}}$ をかける

$$\text{non } C^S = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{v}} = -(\mathbf{N}^{\text{non } \boldsymbol{\varepsilon}})^{-1} \mathbf{N}$$

準備3: Cの行列表記

$$\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial \mathbf{E}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{S}} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{E}} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{E}}$$

$$\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial \mathbf{v}} = \text{non}_{\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{v}} + \mathbf{I}$$

両辺に $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{v}}$ をかける

$$\text{non} \mathbf{C}^{\mathbf{J}} = \text{non}_{\varepsilon} \text{non} \mathbf{C}^{\mathbf{S}} + \mathbf{I}$$

まとめ: \mathbf{C}^J 、 \mathbf{C}^S の行列表記

$$\text{non } \mathbf{C}^J = \text{non } \boldsymbol{\varepsilon} \text{ non } \mathbf{C}^S + \mathbf{I}$$

$$\text{non } \mathbf{C}^S = -(\mathbf{N} \text{ non } \boldsymbol{\varepsilon})^{-1} \mathbf{N}$$

基本方程式の導出(1/2)

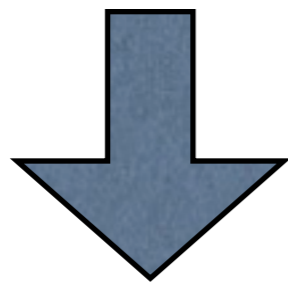
- C^J 、 C^S の行列表記の両辺に ${}^{\text{non}}\varepsilon\mathbf{L}$ を掛ける

$$\begin{aligned} {}^{\text{non}}\mathbf{C}^S {}^{\text{non}}\varepsilon\mathbf{L} &= -(\mathbf{N}^{\text{non}}\varepsilon)^{-1} \mathbf{N}^{\text{non}}\varepsilon\mathbf{L} \\ &= -\mathbf{L} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^{\text{non}}\mathbf{C}^J {}^{\text{non}}\varepsilon\mathbf{L} &= {}^{\text{non}}\varepsilon {}^{\text{non}}\mathbf{C}^S {}^{\text{non}}\varepsilon\mathbf{L} + {}^{\text{non}}\varepsilon\mathbf{L} \\ &= {}^{\text{non}}\varepsilon(-\mathbf{L}) + {}^{\text{non}}\varepsilon\mathbf{L} \\ &= 0 \end{aligned}$$

結合定理の証明完了

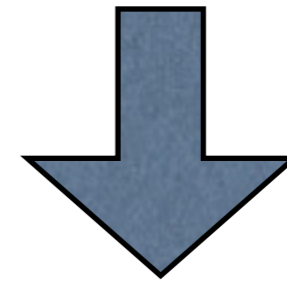
$$\begin{pmatrix} \text{non } C^J \\ \text{non } C^S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K & \text{non } \varepsilon L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & -L \end{pmatrix}$$



加法定理

$$\text{non } C^J K = K$$

$$\text{non } C^S K = 0$$



結合定理

$$\text{non } C^J \text{non } \varepsilon L = 0$$

$$\text{non } C^S \text{non } \varepsilon L = -L$$

残るは加法定理2つ

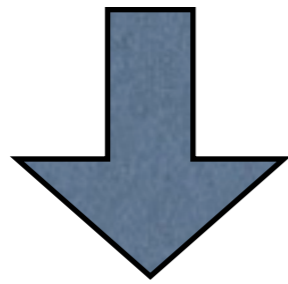
C^J 、 C^S の行列表記の両辺に K を掛ける

$$\begin{aligned}\text{non } C^S K &= -(\mathbf{N}^{\text{non}} \boldsymbol{\varepsilon})^{-1} \mathbf{N} K \\ &= \mathbf{0} \quad (\because \mathbf{N} K = \mathbf{0})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{non } C^J K &= \text{non }_{\boldsymbol{\varepsilon}} \text{non } C^S K + K \\ &= K\end{aligned}$$

基本方程式の証明完了

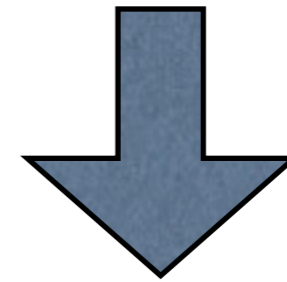
$$\begin{pmatrix} \text{non } \mathbf{C}^{\mathbf{J}} \\ \text{non } \mathbf{C}^{\mathbf{S}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{K} & \text{non } \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{L} \end{pmatrix}$$



加法定理

$$\text{non } \mathbf{C}^{\mathbf{J}} \mathbf{K} = \mathbf{K}$$

$$\text{non } \mathbf{C}^{\mathbf{S}} \mathbf{K} = \mathbf{0}$$



結合定理

$$\text{non } \mathbf{C}^{\mathbf{J}} \text{non } \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{L} = \mathbf{0}$$

$$\text{non } \mathbf{C}^{\mathbf{S}} \text{non } \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{L} = -\mathbf{L}$$

基本方程式の使い方

- K、L
 - Nから求められる
- non_ε 、 non^{CJ} 、 non^{CS}
 - どれか1つがわかっているならばあとは方程式から求まる
- 最後に non_ε 、 non^{CJ} 、 non^{CS} を正規化
- 分岐のある代謝経路でもMCAが可能に

正規化の方法

- 対角行列を左右からかける

$$\mathbf{C}^{\mathbf{J}} = (\text{diag } \mathbf{J})^{-1} (\text{non } \mathbf{C}^{\mathbf{J}}) (\text{diag } \mathbf{J})$$

$$\mathbf{C}^{\mathbf{S}} = (\text{diag } \mathbf{S})^{-1} (\text{non } \mathbf{C}^{\mathbf{S}}) (\text{diag } \mathbf{J})$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\text{diag } \mathbf{J})^{-1} (\text{non } \boldsymbol{\varepsilon}) (\text{diag } \mathbf{S})$$

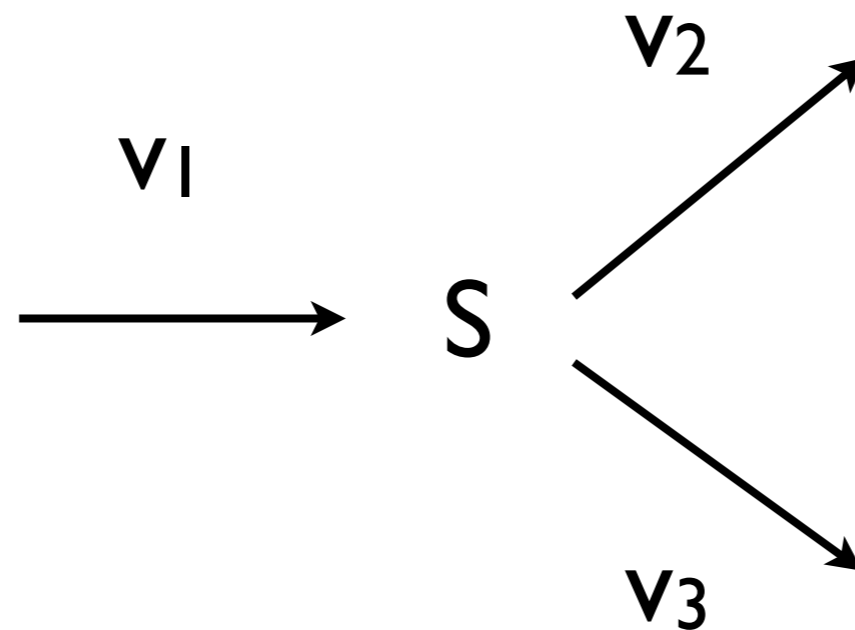
diagの例

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \text{diag } \mathbf{J} = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix}$$

$$(\text{diag } \mathbf{J})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{J_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{J_3} \end{pmatrix}$$

演習2 (1/2)

- 下のような代謝経路について、下記の問題に答えなさい
- 1. Link matrix が I (スカラー) であることを示しなさい。
- 2. K 行列を求めなさい



演習2 (2/2)

- 3. 以下の条件のもとでC行列を求めなさい。

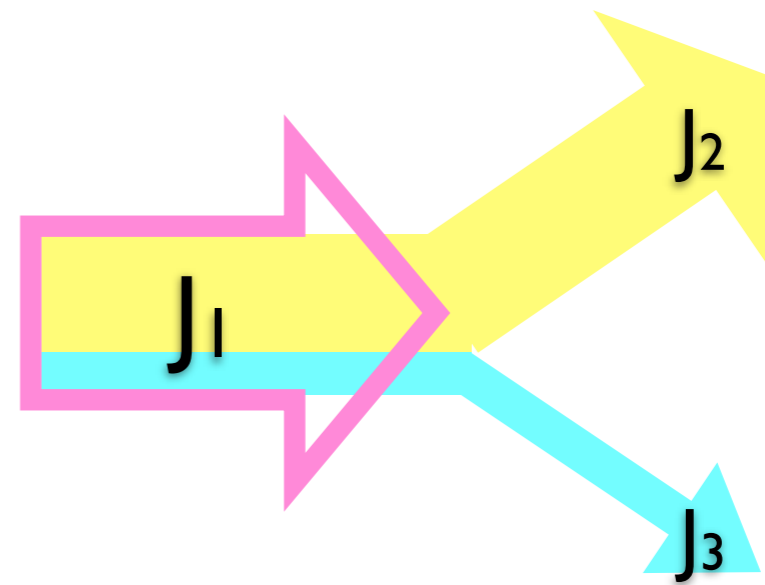
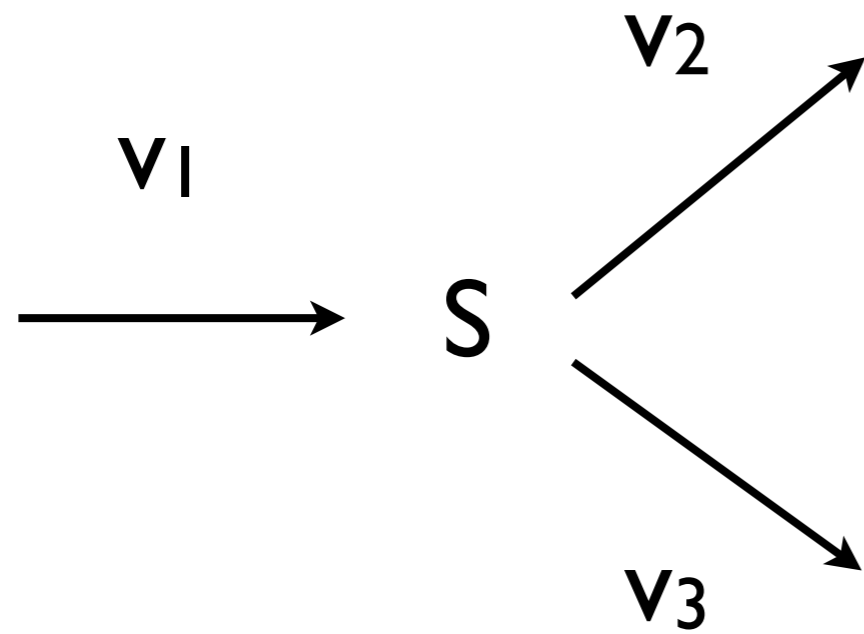
$$\mathbf{non}_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} -0.4 \\ 0.4 \\ 0.2 \end{pmatrix} \text{min}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0 \\ 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix} \text{mM/min}$$

- 4. 加法定理が成り立っていることを確認しなさい。

分岐点と流束

- 次のように考える



参考図書

- ステファノポーラス、アリストティド、ニールセン 「代謝工学原理と方法論」 東京電機大学出版社
- Reinhart Heinrich and Stefan Schuster “The regulation of cellular systems”, Chapman & Hall
- Edda Klipp et al. “Systems biology in practice”, Wiley VCH
- David Fell “Understanding the control of metabolism”, Portland press