微分積分の基礎

(1) 重要な関数の微積分公式

$$\left(x^a\right)' = ax^{a-1} \qquad \int x^a dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$$

$$\left(a^x\right)' = \left(\log a\right)\cdot a^x \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C$$

$$\left(\log|x|\right)' = \frac{1}{x} \qquad \int \log x dx = x\log|x| - x + C$$

$$\left(\sin x\right)' = \cos x \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\left(\cos x\right)' = -\sin x \qquad \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\left(e^x\right)' = e^x \qquad \int e^x dx = e^x + C$$

※C は積分定数

(2) グラフの変換

$x = f\left(t\right)$ について　（t：横軸, x：縦軸）

t方向にτ倍拡大	$\Leftrightarrow$	tの代わりにt/τを代入
x方向にa倍拡大	$\Leftrightarrow$	xの代わりにx/aを代入
t方向にΔだけ平行移動	$\Leftrightarrow$	tの代わりに$t-\Delta$を代入
x方向にΔだけ平行移動	$\Leftrightarrow$	xの代わりに$x-a$を代入

(3) 合成関数の導関数 1

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dU}\cdot\frac{dU}{dx}$$

$$\left\{f\left(g\left(x\right)\right)\right\}' = f'\left(g\left(x\right)\right)\cdot g\left(x\right)'$$

ex.) $\left(e^{2x}\right)'$ について　$U = 2x$ とおくと

$$
\begin{aligned}
\left(e^{2x}\right)' &= \frac{d}{dx}\left(e^{U}\right) \\
&= \frac{de^{U}}{dU}\cdot\frac{dU}{dx} \\
&= e^{U}\cdot 2 \\
&= 2e^{U} \\
&= 2e^{2x}
\end{aligned}
$$

(4) 合成関数の導関数 2

$$
\begin{aligned}
\frac{df(y)}{dx} &= \frac{df(y)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} \\
&= f'(y)\cdot\frac{dy}{dx}
\end{aligned}
$$

ex.)　$x^2 + y^2 = r^2$ において、両辺を x　で微分すると

$$
2x + 2y\cdot\frac{dy}{dx} = 0
$$

$$
\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}
$$

(5) 積の導関数

$$
\left\{f(x)g(x)\right\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)
$$

(6) 商の導関数

$$
\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\left\{g(x)\right\}^2}
$$

ex.) Hill 式の微分

$$
y = \frac{x^n}{k + x^n} \qquad (k\text{:解離定数})
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{nx^{n-1}\cdot\left(k + x^n\right) - \left(nx^{n-1}\right)\cdot x^n}{\left(k + x^n\right)^2} \\
&= \frac{knx^{n-1} + nx^{2n-1} - nx^{2n-1}}{\left(k + x^n\right)^2} \\
&= \frac{knx^{n-1}}{\left(k + x^n\right)^2}
\end{aligned}
$$

$k=1$ として、$x = \sqrt[n]{k} = 1$ での傾きを求めると、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{n \cdot 1^{n-1}}{\left(1+1^{n}\right)^{2}} = \frac{n}{4}$$

※Hill 式において、EC_{50} (50%効果濃度) = $\sqrt[n]{k}$ となる。

（詳しくは「9. n 次反応と Hill 式・Adair 式」参照）

(7) 2 次方程式の解の公式

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

(8) 媒介変数で表された関数の導関数

$x = x(t), y = y(t)$ とすると

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

ex.)

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases} \quad \text{のとき} \quad \begin{cases} x'(t) = -\sin t = -y(t) \\ y'(t) = \ \ \cos t = \ \ x(t) \end{cases}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = -\frac{x}{y}$$

一方 $x^2 + y^2 = 1$ であるので、この両辺を x について微分すると

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 1$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

が得られる。

(9) 1 次近次と 2 次近似

$$f\left(a+\Delta x\right) \approx f\left(a\right) + f'\left(a\right) \cdot \Delta x \qquad :1\text{次近似}$$

$$f\left(a+\Delta x\right) \approx f\left(a\right) + f'\left(a\right) \cdot \Delta x + \frac{1}{2} f''\left(a\right)\left(\Delta x\right)^2 \qquad :2\text{次近似}$$

（※テイラーの定理より導出可能）

ex.)　$e^{\omega t}$ の 2 次近似は

$$e^{\omega(t+\Delta t)} \approx e^{\omega t} + \omega e^{\omega t} \cdot \omega \Delta t + \frac{1}{2}\omega^2 e^{\omega t} \cdot \omega^2 \Delta t^2$$

$\omega t = 0$ あたりでは

$$e^{\omega(t+\Delta t)} \approx e^{0} + \omega e^{0} \cdot \omega \Delta t + \frac{1}{2}\omega^2 e^{0} \cdot \omega^2 \Delta t^2$$
$$= 1 + \omega^2 \Delta t + \frac{1}{2}\omega^4 \Delta t^2$$

(10) 置換積分法

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt \qquad \text{ただし } x = g(t)$$

∵ $\dfrac{dy}{dx} = f(x)$、$x = g(t)$とすると

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dt} \\ &= \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \\ &= f(x) \cdot g'(t) \end{aligned}$$

$$\therefore y = \int f(x) \cdot g'(t) dt$$

ex.1) $\int e^{i\omega t} dt$ を求める

$x = i\omega t$ とおくと　$t = \dfrac{x}{i\omega}$ より $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{i\omega}$

$$\therefore \int e^{i\omega t} dt = \int e^x \cdot \frac{dt}{dx} dx = \int \frac{e^x}{i\omega} dx = \frac{e^x}{i\omega} + C = \frac{e^{i\omega t}}{i\omega} + C$$

ex.2) $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$ を求める

$f(x) = t$ とすると $f'(x)dx = dt$

$$\therefore \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{dt}{t} = \log|t| + C = \log|f(x)| + C$$

ex.3)

$$\int \{f(x)\}^n f'(x) dx = \frac{1}{n+1} \{f(x)\}^{n+1} + C$$

（11）部分積分法

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

∵積の導関数より

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

両辺積分して

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$$

$$\therefore \int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

また、$g(x) = x$としたとき

$$\int f(x)dx = x \cdot f(x) - \int x \cdot f'(x)dx$$

ex.)

$$\begin{aligned}\int (2x+1)e^x &= \int \underbrace{(2x+1)}_{f(x)}\underbrace{(e^x)}_{g'(x)}dx \\ &= (2x+1)e^x - \int 2 \cdot e^x dx \\ &= (2x+1)e^x - 2e^x + C \\ &= (2x-1)e^x + C\end{aligned}$$