

※以下、変数の上のドットは時間に関する微分を表わしている (ex. $\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$)

付録 E 非線形微分方程式の平衡点の安定性解析

E-1) 非線形方程式の線形近似

特に言及してこなかったが、これまでは線形微分方程式 (\ddot{x} や \dot{x} , x などがすべて 1 次で、なおかつそれらの係数が定数であるような微分方程式) に対して安定性の解析を行ってきた。しかしながら、実際には非線形の微分方程式で記述される現象も多く存在する。

そこで、ここでは非線形の方程式を線形近似することによって、線形方程式の場合と同様にヌルクラインから非線形方程式のダイナミクスを考える。

テーラー展開で非線形微分方程式を線形化すれば線形微分方程式の場合と基本的には同じ。但し、 x と y の値によりそれぞれの係数の値が変化することに注意。

まず一般的な場合を考える。

(よくわからない場合は次節の **Van der Pol 方程式** (有名なりットサイクルを与える式) で具体的に考えてから振り返ってみるとよい。)

いま、 x と y の 2 成分が以下の方程式で与えられると考える。

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (\text{E.1})$$

ただし、 f と g のパラメータは時間により変化しないとする。

(E.1) に平衡解 (x^*, y^*) があるとき、式(E.1) は以下の条件をみたす。

$$\left. \begin{aligned} f(x^*, y^*) &= 0 \\ g(x^*, y^*) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

この平衡解が安定であるか不安定であるかは、 (x, y) が平衡点 (x^*, y^*) にあると仮定し、そこから少し (x, y) をずらしてみることで明らかとなる。 (x, y) が再び平衡点に向かえば安定、遠ざかれば不安定である。

そこで、 x を微小量 u , y を微小量 v だけずらすとすると、移動後の点 (x, y) は

$$\left. \begin{aligned} x &= x^* + u \\ y &= y^* + v \end{aligned} \right\}$$

したがって

$$\left. \begin{aligned} u &= x - x^* \\ v &= y - y^* \end{aligned} \right\} \quad (\text{E.2})$$

また、式(E.2) の両辺を t で微分すれば

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \dot{u} \\ \dot{y} &= \dot{v} \end{aligned} \right\}$$

一般に、 $f(x, y)$ をある点 (a, b) で2次元(x と y について) テーラー展開すると

$$f(x, y) = f(a, b) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{a,b} (x-a) + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{a,b} (y-b) + O(x^2, y^2, xy, \dots)$$

但し、 $O(x^2, y^2, xy, \dots)$ は2次以上の高次項を全て含むものとする。

同様に $g(x, y)$ についても

$$g(x, y) = g(a, b) + \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{a,b} (x-a) + \left. \frac{\partial g}{\partial y} \right|_{a,b} (y-b) + O(x^2, y^2, xy, \dots)$$

ここで、 (x, y) が (a, b) に十分近い点である場合 (すなわち $x-a \ll 1, y-b \ll 1$)、高次項を無視して1次項のみで近似することができる。

(但し、1次項が0のときは2次以上の項を入れること！)

その場合、

$$f(x, y) \approx f(a, b) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{a,b} (x-a) + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{a,b} (y-b)$$

$$g(x, y) \approx g(a, b) + \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{a,b} (x-a) + \left. \frac{\partial g}{\partial y} \right|_{a,b} (y-b)$$

と1次近似できる。

いま、上式において点 (a, b) が平衡点 (x^*, y^*) であるとすれば

$$\begin{aligned} x-a &= x-x^* = u & \text{より} & & x &= u+x^* \\ y-b &= y-y^* = v & & & y &= v+y^* \end{aligned}$$

$\dot{x} = \dot{u}$, $\dot{y} = \dot{v}$ より、

$$\begin{aligned} \dot{u} &= f(x, y) \\ &= f(u+x^*, v+y^*) \\ &= f(x^*, y^*) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x^*, y^*} \cdot (u+x^* - x^*) + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{x^*, y^*} \cdot (v+y^* - y^*) \\ &= f(x^*, y^*) + u \cdot \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x^*, y^*} + v \cdot \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{x^*, y^*} \end{aligned}$$

$f(x^*, y^*) = 0$ なので

$$\dot{u} = u \cdot \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x^*, y^*} + v \cdot \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{x^*, y^*}$$

ここで、 $f_x \equiv \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x^*, y^*}$, $f_y \equiv \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{x^*, y^*}$ とおくと

$$\dot{u} = f_x \cdot u + f_y \cdot v$$

\dot{v} についても同様に

$$\dot{v} = g_x \cdot u + g_y \cdot v$$

まとめると

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

ここで、 $J \equiv \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix}$ とするとき、行列 J を **ヤコビ行列 (Jacobian matrix)** という。

(ヤコビ行列の行列式 $|J|$ は、ヤコビ行列式 (Jacobian determinant)、もしくは単にヤコビアン (Jacobian) と呼び、二重積分の変数変換などで利用される)

※線形の場合 $J = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は常に一定の定数であったが、非線形の場合、解 (x^*, y^*) に依存

して異なることに注意。

E-2) Van der Pol oscillator

前節に関して、ここでは具体的に以下のような連立微分方程式で考えてみよう。

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) = y - x^3 + x & \text{(E.3)} \\ \dot{y} = g(x, y) = -x & \text{(E.4)} \end{cases}$$

ここで、式(E.3)の両辺を時間に関して微分して

$$\ddot{x} = \dot{y} - 3x^2 \cdot \dot{x} + \dot{x}$$

これに式(E.4)を代入すると

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -x - 3x^2 \cdot \dot{x} + \dot{x} \\ \therefore \ddot{x} + (3x^2 - 1)\dot{x} + x &= 0 \end{aligned} \quad \text{(E.5)}$$

が得られ、この連立微分方程式は、単独の2階微分方程式の形に変形できる。

式(E.5)を見ると、第二項 $(3x^2 - 1)\dot{x}$ は非線形の形になっている。式(E.5)とバネの振動の運動方程式 $\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0 x = 0$ とを見比べれば、この第二項は摩擦項に相当していることがわかるだろう。つまり、摩擦項が非線形成分となっていることになる。

このように、支配方程式が非線形の摩擦項 (\dot{x} の係数が x の関数) を持つ2階微分方程式で記述される (あるいは、式(E.3), (E.4) の形の連立微分方程式で記述される) ような oscillator (振動子、発振器) のことを、**Van der Pol oscillator** という。

さて、連立微分方程式型の Van der Pol oscillator の式、(E.3), (E.4) に戻って、E-1) で行った線形近似を行ってみよう。

一般に、2変数関数 $f(x, y)$ をある点 (a, b) においてテーラー展開し1次(線形)近似すると

$$\dot{x} = f(x, y) = f(a, b) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{a,b} (x - a) + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{a,b} (y - b)$$

いま、 $f(a, b) = b - a^3 + a$, $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{a,b} = -3a^2 + 1$, $\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{a,b} = 1$ なので

$$\dot{x} = (b - a^3 + a) + (-3a^2 + 1)(x - a) + (y - b)$$

$x - a = u$, $y - b = v$ とおくと $\dot{x} = \dot{u}$ なので

$$\dot{u} = (b - a^3 + a) + (-3a^2 + 1)u + v \quad \text{(E.6)}$$

同様に $g(x, y)$ についても

$$\dot{y} = g(x, y) = g(a, b) + \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{a,b} (x-a) + \left. \frac{\partial g}{\partial y} \right|_{a,b} (y-b)$$

$g(a, b) = -a$, $\left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{a,b} = -1$, $\left. \frac{\partial g}{\partial y} \right|_{a,b} = 0$, $\dot{y} = \dot{v}$ なので

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -a + (-1) \cdot (x-a) + 0 \cdot (y-b) \\ &= -a - (x-a) \end{aligned}$$

$$\therefore \dot{v} = -a - u \tag{E.7}$$

式(E.6), (E.7) をまとめて

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b - a^3 + a \\ -a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3a^2 + 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \tag{E.8}$$

ここで $\dot{x} = \dot{y} = 0$ をみたす解、すなわち平衡解 (x^*, y^*) を求めると

式(E.3), (E.4) より $\dot{x} = f(x^*, y^*) = 0$, $\dot{y} = g(x^*, y^*) = 0$ なので

$$x^* = y^* = 0$$

前頁において (a, b) を (x^*, y^*) に読み替えると、 $a = b = 0$ になるのでこれを式(E.8) に代入すれば

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \tag{E.9}$$

を得る。

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ とすると } \operatorname{tr} J = 1 > 0, \det J = 1 > 0 \text{ かつ } \det J = 1 > \frac{(\operatorname{tr} J)^2}{4} = \frac{1}{4} \text{ なので、}$$

周りでは**発散振動**することがわかる。(※詳細は付録 D「D-6) 平衡点の分類」を参照したがって、この平衡点は**不安定点**である。

ここで、式(E.3), (E.4) のヌルクラインを求めると

$$\begin{aligned} \dot{x} = 0 &\Leftrightarrow y = x^3 - x \\ \dot{y} = 0 &\Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

したがって、ヌルクラインおよび式(E.3), (E.4) の解の挙動の様子は図 e-1 のようになる。

Van der Pol のヌルクライン

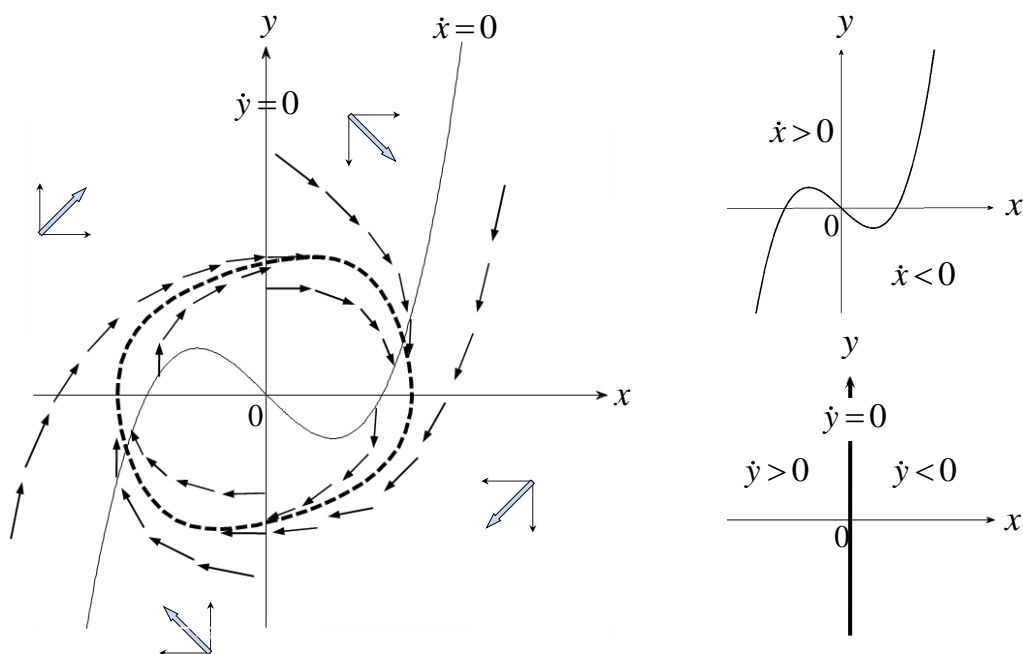


図 e-1

概念的な説明になるが、式(E.5)を見ると、摩擦項 $(3x^2 - 1)\dot{x}$ は、 x が $|x| > \frac{1}{\sqrt{3}}$ の範囲にある場合は正の摩擦、すなわち振動を減衰させる方向へと作用させるが（バネの振動の運動方程式における γ と同じ）、 $|x| < \frac{1}{\sqrt{3}}$ の範囲にあるときには、摩擦項 $(3x^2 - 1)\dot{x}$ は負になり、負の減衰力、すなわち振動を成長させるような作用が働くと考えられる。つまり、減衰振動と発散振動の境界が存在することになる。図 e-1 では、 \dots で囲った領域の外側で減衰振動が、内側で発散振動が起こる。実際、式(E.9)の行列 J より平衡点周りでは発散振動することがわかった。ファンデルポール方程式のように、ある境界の外側で減衰振動、内側で1つの不安定平衡点が発散振動をする場合には、その境界は**リミットサイクル(幾何学的にはある解曲線が $t \rightarrow \infty$ で巻きつく閉軌道のこと)となることが知られている。**

このことを解説するために、平面微分方程式系に関する有名な定理（ポアンカレ・ベンディクソンの定理）を紹介しよう。 x_0 を平面上の任意の初期ベクトルとする。対応する ω 極限集合($t \rightarrow \infty$ としたときの x_0 の集合) $\neq \emptyset$ に属する任意のベクトルは以下の3通りに限られる。1)平衡点となる 2)周期的な閉軌道を描く 3)リミットサイクルに向かう。

この定理の詳しい証明は参考文献に譲るとして、この定理から「部分集合 K (有界閉集合)が、正方向または負方向に不変なら、 K はリミットサイクルまたは平衡点を含む」という結論が得られ、ファンデルポール方程式にはリミットサイクルが唯一つ存在することが証明されている。

E-3) Hopf 分岐

前章の Van der Pol oscillator において $\dot{y}=-x$ にある一定入力 I が加わる場合を考える。
このとき、以下のような式になる。

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x^3 + x & \text{(E.10)} \\ \dot{y} = -x + I & \text{(E.11)} \end{cases}$$

式(E.10) および(E.11) のヌルクラインは

$$\begin{aligned} \dot{x} = 0 &\Leftrightarrow y = x^3 - x & \text{(E.12)} \\ \dot{y} = 0 &\Leftrightarrow x = I \end{aligned}$$

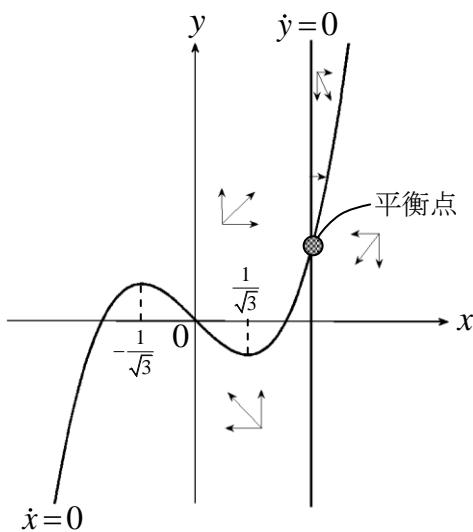
これらを xy 平面上に図示した場合、直線 $x = I$ が曲線 $y = x^3 - x$ に対してどのような位置にあるかによって、平衡点の様子が異なりそうである。そこで式(E.10) の極値を次のように求め

$$\begin{aligned} y'(x) &= 3x^2 - 1 = 0 & \text{(E.13)} \\ \Leftrightarrow x &= \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

入力 I を、 $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ との大小によって場合分けして考える。

つまり、(i) $I > \frac{1}{\sqrt{3}}$, (ii) $I = \frac{1}{\sqrt{3}}$, (iii) $\frac{1}{\sqrt{3}} > I > -\frac{1}{\sqrt{3}}$, (iv) $I = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, (v) $I < -\frac{1}{\sqrt{3}}$ の場合について考える。

(i) $I > \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき



左図よりヤコビ行列 J の符号は

$$\begin{pmatrix} - & + \\ - & 0 \end{pmatrix}$$

(付録 D-5) の「グラフから行列 J の符号を判定する方法」を参照のこと)

このとき

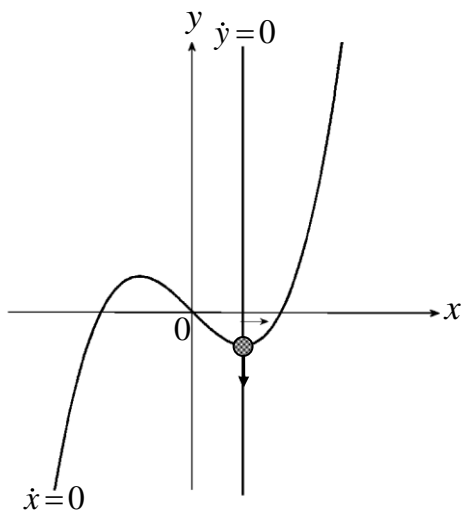
$$\text{tr } J < 0$$

$$\det J > 0$$

つまり、振動しながら or 振動せずに一点 (平衡点) に収束する。

よってこの平衡点は**安定解**である。

(ii) $I = \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき



同様に

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

つまり

$$J = \begin{pmatrix} 0 & + \\ - & 0 \end{pmatrix}$$

なので

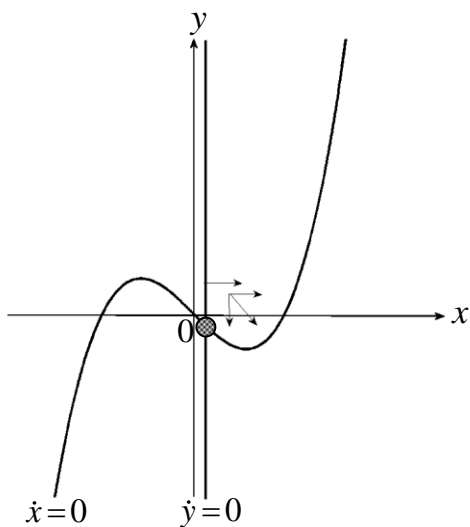
$$\text{tr } J = 0$$

$$\det J > 0$$

これは**単安定**な振動解である。

よって初期値に依存した振動解となる。

(iii) $\frac{1}{\sqrt{3}} > I > -\frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき



同様に

$$J = \begin{pmatrix} + & + \\ - & 0 \end{pmatrix}$$

なので

$$\text{tr } J > 0$$

$$\det J > 0$$

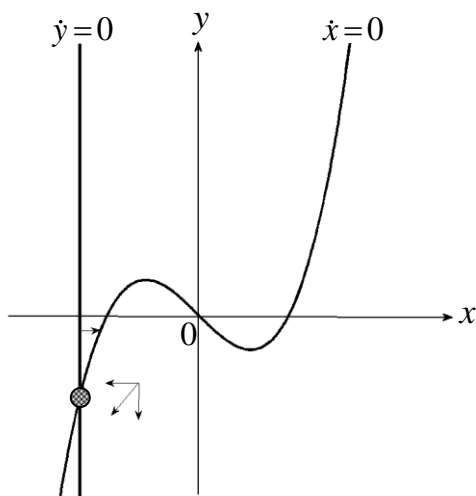
つまり発散振動となり、平衡点は**不安定**。

※ $\text{tr } J$ の符号が(i) $I > \frac{1}{\sqrt{3}}$ の場合から
+ に変わっていることに注意。

(iv) $I = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき

$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ すなわち $J = \begin{pmatrix} 0 & + \\ - & 0 \end{pmatrix}$ なので、 $\text{tr } J = 0, \det J > 0$ となり、(ii) $I = \frac{1}{\sqrt{3}}$ の場合と同じである。

(v) $I < -\frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき



同様に

$$J = \begin{pmatrix} - & + \\ - & 0 \end{pmatrix}$$

よって

$$\text{tr } J < 0$$

$$\det J > 0$$

この場合も (i) $I > \frac{1}{\sqrt{3}}$ のときと同じく **安定解** である。

このように、入力 I の値を変化させると、平衡点は **[安定] → [不安定] → [安定]** と変化し、同時に $\text{tr } J$ の符号も変化していることがわかる。

例えば、安定から不安定に変化するときは $\det J > 0$ のまま $\text{tr } J$ が負から正に変化している。つまり

(I) 安定なとき、すなわち $\text{tr } J < 0, \det J > 0$ のとき

固有値 $\lambda = \alpha \pm i\beta$ の実数部 α は負となり、時間とともに収束する。

(II) 不安定なとき、すなわち $\text{tr } J > 0, \det J > 0$ のとき

固有値 $\lambda = \alpha \pm i\beta$ の実数部 α は正となり、時間とともに発散する。

このように、固有値が複素数の場合、実数部の符号が負から正へ移動すると平衡点は安定から不安定へと移る。

⇒これを（スーパークリティカル）**ホップ分岐 (Hopf bifurcation)** という。

また、 $\text{tr } J = f_x + g_y$ がある領域 D でその符号を変えないとき、領域 D にはリミットサイクルが存在しない。⇒これを**ベンディクソンの定理**という。

したがって、(i) $I > \frac{1}{\sqrt{3}}$, (v) $I < -\frac{1}{\sqrt{3}}$ の場合にはリミットサイクルは存在しない。