※以下、変数の上のドットは時間に関する微分を表わしている（ex. $\dot{x}=\dfrac{dx}{dt},\ddot{x}=\dfrac{d^2x}{dt^2}$）

付録Ｄ　安定性と振動

D-1) バネの運動方程式とのアナロジー

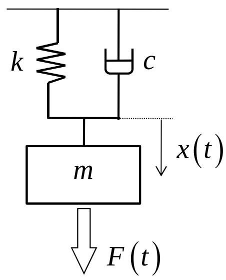


図 d-1

図 d-1 のように、質量 m の物体が、バネ定数 k のバネ、および粘性摩擦係数 c を持つダッシュポットで支えられている系を考える。

ただし、ダッシュポットは物体の速度 $\dot{x}$ に比例して $c\dot{x}$ という抵抗力（摩擦力）を生じる。

いま、物体へ外力 $F(t)$ が作用するとき、この系の運動方程式は

$$\underbrace{m\ddot{x}}_{\text{慣性力}} + \underbrace{c\dot{x}}_{\text{摩擦力}} + \underbrace{kx}_{\text{弾性力}} = \underbrace{F(t)}_{\text{外力}} \qquad \text{(D.1)}$$

で与えられる。
ただし、$\dot{x}$ は位置 x を時間 t に関して 1 階微分したもの（= 速度)、$\ddot{x}$ は同様に 2 階微分したもの（= 加速度)、を表す。

式(D.1) の両辺を m で割って、$\gamma = c/m,\ \omega_0^2 = k/m$ とおくと

（※ω_0 を**固有角振動数**という。ω については補足 2 参照。また、γ は見かけの摩擦係数とみなせる。）

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m} \qquad \text{(D.2)}$$

ここで、外力 F が $F(t) = \hat{F}\sin\omega t$ で与えられるときを考えてみよう。**（強制振動）**

付録 C で触れたように、（入出力関係が線形のシステムでは）正弦波の入力を与えた場合、出力も入力と同じ周波数を持った正弦波となるはずなので、ここでも同様にして $F = \hat{F}e^{i\omega t}$, $x = \hat{x}e^{i\omega t}$ と複素数で解を仮定してみる。
このとき

$$\dot{x} = i\omega\,\hat{x}e^{i\omega t} \qquad \text{(D.3)}$$

$$\ddot{x} = -\omega^2\hat{x}e^{i\omega t} \qquad \text{(D.4)}$$

であるので、これらを式(D.2) へ代入すると
（※簡単のため $m = 1$ とする）

$$-\omega^2\hat{x}e^{i\omega t} + \gamma i\omega\hat{x}e^{i\omega t} + \omega_0{}^2\hat{x}e^{i\omega t} = \hat{F}e^{i\omega t} \qquad \text{(D.5)}$$

$$\underbrace{\left(-\omega^2 + \gamma i\omega + \omega_0{}^2\right)}_{\text{RLC 電気回路のインピーダンスに相当}}\hat{x} = \hat{F} \qquad \text{(D.6)}$$

$$\therefore \frac{\hat{x}}{\hat{F}} = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + \gamma i\omega} \qquad \text{(D.7)}$$

すると $gain$ は

$$\left|\frac{\hat{x}}{\hat{F}}\right|^2 = \frac{1}{\left|\omega_0^2 - \omega^2 + \gamma i\omega\right|^2}$$

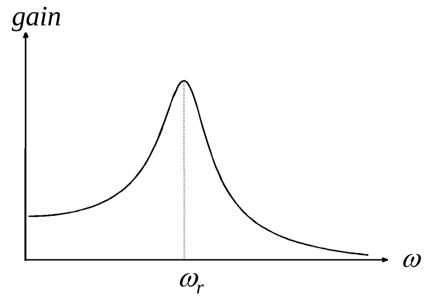
$$= \frac{1}{\underbrace{\left\{\left(\omega_0{}^2 - \omega^2\right) + \gamma i\omega\right\}\left\{\left(\omega_0{}^2 - \omega^2\right) - \gamma i\omega\right\}}_{\textbf{複素共役}\ \left(|z|^2 = z\cdot\bar{z}\right)}}$$

$$= \frac{1}{\left(\omega_0{}^2 - \omega^2\right)^2 + \gamma^2\omega^2} \tag{D.8}$$

より

$$gain = \left|\frac{\hat{x}}{\hat{F}}\right| = \frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0{}^2 - \omega^2\right)^2 + \gamma^2\omega^2}} \tag{D.9}$$

これを横軸にω, 縦軸に $gain$ をとってグラフを書くと図 d-2 (上) のようになる。また、両対数軸で描いたものを図 d-2 (下) に示した。



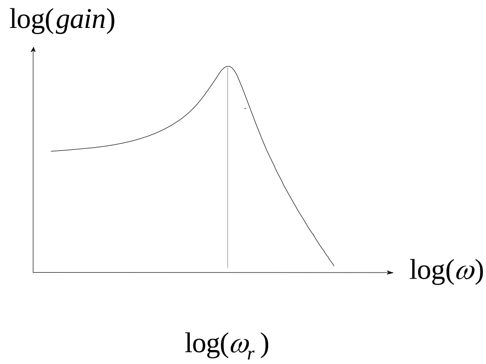


図 d-2

$gain$ を最大にする角振動数ω を求めるため、$gain$ を ω の関数 $gain\,(\omega)$ とみて、ω について微分すると

$$gain'\left(\omega\right) = \frac{\omega\left(2\omega_0^2 - \gamma^2 - 2\omega^2\right)}{\left(\left(\omega_0{}^2 - \omega^2\right)^2 + \gamma^2\omega^2\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{D.10}$$

$\omega \neq 0$ のとき

$$gain'\left(\omega\right) = 0 \Leftrightarrow 2\omega_0^2 - \gamma^2 - 2\omega^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \omega^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{2}$$

よって、 $gain$ は $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \dfrac{\gamma^2}{2}}\left(\equiv \omega_r \text{とおく}\right)$ のときに極大値

$$gain_{\max} = \frac{1}{\sqrt{\gamma^2\omega_0^2 - \dfrac{\gamma^4}{4}}} \tag{D.11}$$

をとる。

このとき、図 d-2 より、外力の角振動数ω が ω_r に 近づくにつれて $gain$ は急増し、やがて$\omega = \omega_r$ となるところで最大となっていることがわかる。

特に、摩擦係数γ が非常に小さい場合（$\gamma \ll \omega_0$）には、*gain* は$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \dfrac{\gamma^2}{2}} \cong \omega_0$ で極大値

$$gain_{\max} = \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 \omega_0^2 - \dfrac{\gamma^4}{4}}} \cong \frac{1}{\gamma \omega_0} \tag{D.12}$$

をとることがわかる。

このように、外部から振動が与えられる場合に、その外力の角振動数が系の固有角振動数に近づくと *gain* が急激に大きくなることを**共振現象**といい、*gain* が最大となるときの角振動数ω_r を**共振角振動数**という。特に、$\gamma \ll \omega_0$ の場合は、固有角振動数と共振角振動数は一致する$\left(\omega_r \cong \omega_0\right)$。

※<u>補足 1</u>

以下の x と y の相互作用の式（質量作用ではない）と運動方程式 $\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ は本質的に同じである。

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "a"] \arrow[d, shift left, "c"] & {} \\ y \arrow[u, shift left, "b"] \arrow[r, "d"] & {} \end{tikzcd} \quad \Longleftrightarrow \quad \ddot{x} - \underbrace{\left(a + d\right)}_{trace} \dot{x} + \underbrace{\left(ad - bc\right)}_{determinant} x = 0$$

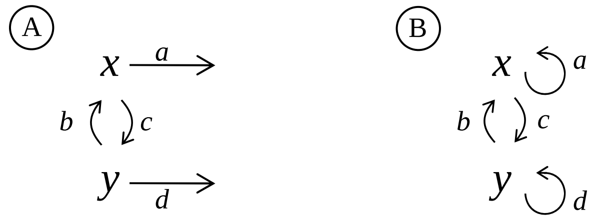
（※「**D-2) 概念的な生化学反応と力学系**」にて詳述）

※<u>補足 2</u>

文章中で、「周波数」と「振動数」という言葉が使われているが、これらは本質的に同じものであり、英語ではいずれも frequency である。単位はいずれも[Hz]（ヘルツ）を用いる。また同様に、角周波数、角振動数、角速度も本質的に同義である。単位はいずれも[rad/s]。周波数f と角周波数ω との関係は$\omega = 2\pi f$ で与えられる。

これらの用語は、見ている現象によって使い分けられ、振動数は物理現象や機械系の分野などで、周波数は制御工学や電気系の分野で用いられることが多い。

D-2) 概念的な生化学反応と力学系



$a < 0, d < 0$ のとき　　　　　$a > 0, d > 0$ のとき

概念的な生化学反応ネットワークを簡単にモデル化することを考えよう。x と y を分子と見立て、a ,b ,c ,d は反応の強さと向きを表すとする。A の場合、$a < 0$ なので x は速度定数 a に従い分解されていくとみなせる。同様に y も d (< 0) に従い分解されていくと見なせる。一方、B の場合は、$a > 0$ なので x は速度定数 a に従い増加していくため、一種のポジティブフィードバックと見なすこともできる。ただし、ポジティブフィードバックは時間とともに発散していき、双安定性は示さない（現実的に細胞では何かの分子が発散することはなく、分子数は有限なのでどこかで落ち着くことになる。ただし、そこは後で述べる安定な点ではない！）。

また、x の y に対する作用は、$c > 0$ のとき活性化、$c < 0$ のとき抑制化であると見なせる。y の x に対する作用も同様である。a, b, c, d はそれぞれ速度定数とみなして、x の y の関係を以下のような連立微分方程式に書き下すことにする。

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by & \text{(D.15)} \\ \dot{y} = cx + dy & \text{(D.16)} \end{cases}$$

ただし、$\dot{x}$ は x の時間変化 $\frac{dx}{dt}$, $\dot{y}$ は y の時間変化 $\frac{dy}{dt}$ を表す。

式(D.15)$\times d$ より

$$d\dot{x} = adx + bdy \tag{D.17}$$

式(D.16)$\times b$ より

$$b\dot{y} = bcx + bdy \tag{D.18}$$

式(D.17) − 式(D.18) より

$$d\dot{x} - b\dot{y} = (ad - bc)x$$

$$\therefore b\dot{y} = d\dot{x} - (ad - bc)x \tag{D.19}$$

また、(D.15) の両辺を t について微分すると

$$\ddot{x} = a\dot{x} + b\dot{y} \tag{D.20}$$

式(D.19) を式(D.20) に代入すると

$$\ddot{x} = (a+d)\dot{x} - (ad-bc)x$$

$$\therefore \ddot{x} - (a+d)\dot{x} + (ad-bc)x = 0 \tag{D.21}$$

が得られる。（同様に、$\ddot{y} - (a+d)\dot{y} + (ad-bc)y = 0$ も得られる）

この式は、D-1) の補足 1 でも触れたように、(D.2)で外力が働かない場合のバネの運動方程式 $\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 = 0$（ただし $\gamma = c/m,\ \omega_0^2 = k/m$ ）と非常によく似た形をしている。式(D.21)をバネの運動方程式と対応させた場合、質量 $m = 1$、$\gamma = -(a+d)$、固有角振動数は $\omega_0^2 = ad - bc$ となる。（ただし、$\gamma > 0$，$\omega_0^2 > 0$ より、$a + d < 0$，$ad - bc > 0$）

つまり、分解が摩擦に対応しており、また、角周波数 $\sqrt{ad-bc}$ を持つような入力刺激に対して、この系は最大の応答をすることになる（共振現象）。

（※詳しい対応関係については「D-3) 線形微分方程式の対応表」参照）

一方、式(D.15), (D.16) は、行列を用いて

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{D.22}$$

と表せる。

ここで $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおいて、行列 A の固有値を λ_1, λ_2 とすると、λ_1, λ_2 は固有方程式

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc) = 0 \tag{D.23}$$

の解である。

$\mathrm{tr}\,A = a + d$，$\det A = ad - bc$ であるから、式(D.23) の解 λ_1, λ_2 は

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{\mathrm{tr}\,A \pm \sqrt{(\mathrm{tr}\,A)^2 - 4 \cdot \det A}}{2} \tag{D.24}$$

これより

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{tr}\,A = a + d$$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det A = ad - bc$$

と表せる。

※行列 A の対角成分の和 $a + d$ を、A のトレース(trace) といい、$\mathrm{tr}\,A$ と表す。また、$\det A$ は A の行列式 $ad - bc$ のことである。

したがって式(D.21) は

$$\ddot{x} - (\lambda_1 + \lambda_2)\dot{x} + \lambda_1\lambda_2 x = 0 \tag{D.25}$$

と書ける。

ここで、$\lambda_1 \neq \lambda_2$ のとき、それぞれの固有値に対する固有ベクトルを，$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$ とすれば、$\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ は一次独立だから、式(D.22) の一般解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} + C_2 e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \tag{D.26}$$

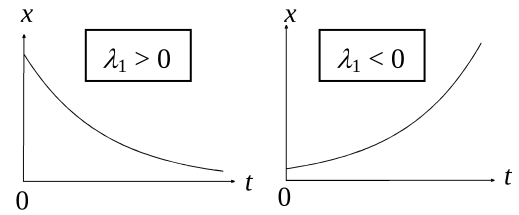
と表すことができる。但し、C_1, C_2 は定数である。(※補足３参照)

ここで、固有値が異なる 2 つの実数であるとき、
すなわち式(D.24) において $(\mathrm{tr}\,A)^2 - 4 \cdot \det A > 0$ であるとき、
例えば解が $x(t) = e^{\lambda_1 t}$ となる場合を考えてみると

$\lambda_1 > 0$ のとき　　$x(\infty) \to 0$

$\lambda_1 < 0$ のとき　　$x(\infty) \to \infty$

となる。



また、固有値が複素数のとき、すなわち式(D.24) において $(\mathrm{tr}\,A)^2 - 4 \cdot \det A < 0$ であるとき、例えば解が $x(t) = e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_2 t}$ となる場合を考えてみる。$\lambda_1 = a + bi$, $\lambda_2 = a - bi$ とすれば

$$x(t) = e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_2 t} = e^{(a+bi)t} + e^{(a-bi)t} = e^{at}\left(e^{ibt} + e^{-ibt}\right)$$

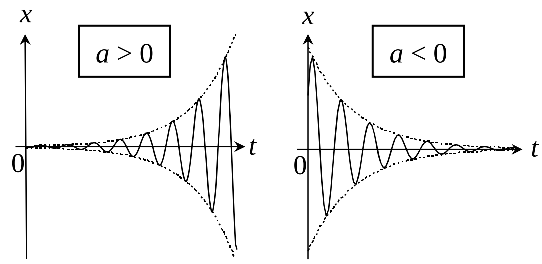
オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ より

$$x(t) = 2e^{at}\cos bt \tag{D.27}$$

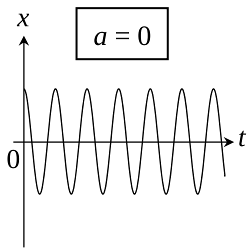
このとき

$a > 0$ のとき　　$x(\infty) \to \infty$

$a < 0$ のとき　　$x(\infty) \to 0$



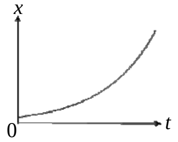
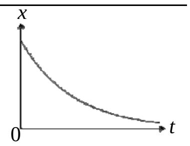
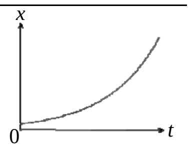
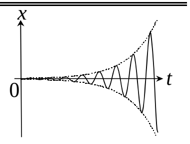
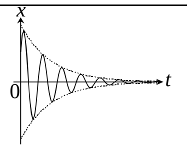
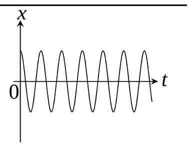
また、$a = 0$, すなわち 固有値が純虚数の場合は式(D.27) は調和振動（単振動）となる。



つまり、**<u>虚数解は振動成分を生む</u>**ということがわかる。

以上のことから、λ_1, λ_2 の取り得る値（正負、実虚）、すなわち $\mathrm{tr}\,A$, $\det A$ の関係によって式(D.26) の挙動が変化することがわかる。

これより、固有値 λ_1, λ_2 の取り得る値によって解の挙動の様子をまとめると次の表のようになる。

	固有値 の正負	$\mathrm{tr}\,A = \lambda_1 + \lambda_2$ の正負	$\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2$ の正負	解の挙動	解の時間 変化の様子
実数解 $\det A < \frac{1}{4}(\mathrm{tr}\,A)^2$ **（振動しない）**	$\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0$	＋	＋	発散	
	$\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 < 0$	−	＋	減衰	
	$\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 < 0$ $\begin{cases} \lvert\lambda_1\rvert > \lvert\lambda_2\rvert \\ \lvert\lambda_1\rvert < \lvert\lambda_2\rvert \end{cases}$	＋ −	− −	発散	
虚数解 $\det A > \frac{1}{4}(\mathrm{tr}\,A)^2$ **（振動する）**	実数部 > 0	＋	＋	発散振動	
	実数部 < 0	−	＋	減衰振動	
	実数部 $= 0$ (純虚数)	0	＋	単振動	

式(D.23) が重解をとなるときは（すなわち$\lambda_1 = \lambda_2,\ \det A = \frac{1}{4}(\mathrm{tr}\,A)^2$ のとき）、振動するかしないかの境界となっている。

次に、$\mathrm{tr}\,A$ と $\det A$ の取り得る値によって式(D.22) の解(x, y) がどうふるまうのか考えてみよう。

いま、以下のような連立微分方程式

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$$

を考えたとき、この方程式を満たす解を $x(t), y(t)$ とすると、点$\left(x(t), y(t)\right)$の軌跡は平面上の曲線を表す。この平面を**相平面**といい、解を描く曲線を**解軌道**という。

そこで、式(D.22) の解軌道が $\mathrm{tr}\ A$ と $\det\ A$ の値によってどのように変化するのかを図示すると、図 d-3 のようになる。

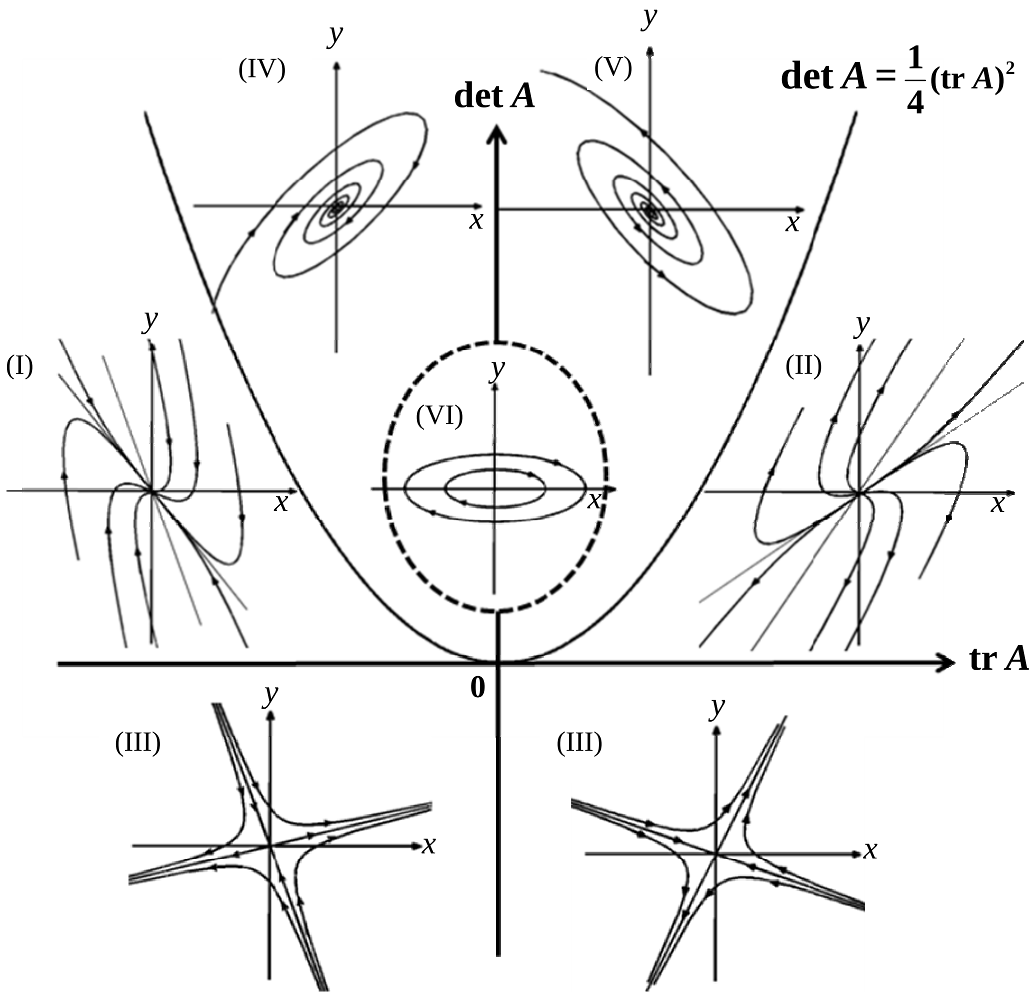


図 d-3

※グラフ中のローマ数字は「D-6) 平衡点の分類」における表に対応している。そちらも参照にされたい。

それでは、式(D.21)：$\ddot{x}-\left(a+d\right)\dot{x}+\left(ad-bc\right)x=0$ を運動方程式 $\ddot{x}+\gamma\dot{x}+\omega_0^2=0$ と対応させた場合には、解の挙動はどのようになるのだろうか。図 d-3 を用いて、調べてみよう。

運動方程式と対応させた場合には、$\gamma=-(a+d)>0$，$\omega_0^2=ad-bc>0$ となるので

$$\begin{cases} \mathrm{tr}\,A = \ a+d \ <0 \\ \det A = ad-bc>0 \end{cases}$$

を満たす。よって、この場合は図 d-3 の第 2 象限にあたることがわかる。

したがって、図 d-3 の第 2 象限を見てみると、(I)と(IV) の解軌道の場合があるとわかるが、いずれ場合のも解$\left(x(t),y(t)\right)$は時間とともに**減衰し、ある一点へ収束する**と考えられる。（ただし外力は無いものとする）

さらに$\det A < \frac{1}{4}(\mathrm{tr}\, A)^2$ を満たす場合には（すなわち式(D.23) で固有値$\lambda_1,\ \lambda_2$ が実数のとき）、解軌道は図 d-3 (I) のようになり、**減衰するが振動しない**と予想される。（これを**過減衰**という）

また、逆に$\det A > \frac{1}{4}(\mathrm{tr}\, A)^2$ である場合には、解軌道は図 d-3 (IV) のようになり、**減衰しながら振動する**と考えられる。（これを**減衰振動**という）

このときの a, b, c, d の関係を調べてみると、 $\det A = ad - bc,\ \mathrm{tr}\, A = -\left(a+d\right)$ より

$$\det A > \frac{1}{4}(\mathrm{tr}\, A)^2 \Leftrightarrow ad - bc > \frac{1}{4}\left(a+d\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(a+d\right)^2}{4\cdot\left(ad-bc\right)} < 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{-\left(a+d\right)}{2\cdot\sqrt{ad-bc}} < 1 \quad \left(\because (a+d) < 0, ad - bc > 0\right)$$

すなわち

$$\frac{-\left(a+d\right)}{2\sqrt{ad-bc}} < 1 \ \Rightarrow \text{振動する}$$

同様にして、

$$\det A < \frac{1}{4}(\mathrm{tr}\, A)^2 \Leftrightarrow \frac{-\left(a+d\right)}{2\sqrt{ad-bc}} > 1 \Rightarrow \text{振動しない}$$

とわかる。

$\frac{-\left(a+d\right)}{2\sqrt{ad-bc}} = 1$ のときも振動はしないが、振動が現れるかどうかの臨界の状態なので、特にこの場合を**臨界減衰**と呼ぶ。

一方、摩擦（分解）がない場合、すなわち$\gamma = -(a+d) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{tr}\, A = 0$ の場合には、常に$\det A > \frac{1}{4}(\mathrm{tr}\, A)^2$ を満たし、解軌道は図 d-3 (VI) のようになる。したがって、**減衰せずに振動し続ける**と考えられる。（つまりこれは**単振動**である）

以上をまとめると、$\mathrm{tr}\, A < 0,\ \det A > 0$ の条件下では

$$
\begin{cases}
\gamma=-\left(a+d\right)=0 \text{（摩擦なし）} \Rightarrow \text{減衰なし（単振動）} \\
\gamma=-\left(a+d\right)>0 \text{（摩擦あり）} \Rightarrow \text{減衰あり、なおかつ} \begin{cases} \dfrac{-\left(a+d\right)}{2\sqrt{ad-bc}}>1 \Rightarrow \text{振動しない（過減衰）} \\ \dfrac{-\left(a+d\right)}{2\sqrt{ad-bc}}<1 \Rightarrow \text{振動する　（減衰振動）} \end{cases}
\end{cases}
$$

つまり、固有値が実数であるか虚数であるかによって振動の有無が、摩擦（分解）があるかないかによって減衰の有無が決まる。

※以上は生化学反応の式にあわせて振動条件を求めたが、運動方程式 $\ddot{x}+\gamma\dot{x}+\omega_0^2=0$ の振動条件を求めると、$\det A=\omega_0^2,\ \mathrm{tr}\,A=-\gamma$ なので、$\det A>\frac{1}{4}(\mathrm{tr}\,A)^2$ より

$$
{\omega_0}^2<\frac{\gamma^2}{4} \qquad \therefore 1<\frac{\gamma^2}{4\omega_0^2}
$$

$$
\text{よって}\quad \frac{\gamma}{2\omega_0}>1 \qquad \left(\because \gamma>0,\ \omega_0>0\right)
$$

※<u>補足 3　連立同次線形微分方程式の一般解</u>

同次連立微分方程式 $\dot{X}=AX$ に関して次の定理が成り立つ。ただし, $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{\mathrm{n}} \end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

A が n 次の定数行列で n 個の異なる固有値 $(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$ とそれに対する固有ベクトル $(C_1,C_2,\cdots,C_n)$ をもつならば, この微分方程式の一般解は

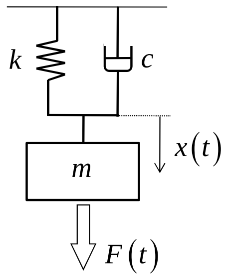
$$
X(t)=\sum_{i=1}^{n} C_i X_i(t)
$$

で与えられる。ただし、$X(t)=C_i e^{\lambda_i t}(i=0,1,\cdots,n)$ はそれぞれ $X'=AX$ の解であり、一次独立である。

この定理の詳しい証明は線形代数の教科書を参考に譲るが、微分方程式 $\dot{x}(t)=ax(t)$ の一般解は $x(t)=e^{at}$ で与えられることと、重ね合わせの原理($X_1,X_2,\cdots$ が線形方程式の解となる場合、$\alpha X_1+\beta X_2+\cdots$ (α,β は任意の定数)も同様に解となる)を勘案すると上述のように一般解が求まる。

D-3) 線形微分方程式の対応表

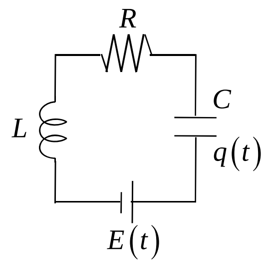
(i) バネの振動



$$\underbrace{m\ddot{x}}_{\text{慣性力}} + \underbrace{c\dot{x}}_{\text{摩擦力}} + \underbrace{kx}_{\text{弾性力}} = \underbrace{F(t)}_{\text{外力}}$$

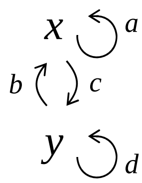
$$\left(\Leftrightarrow \ddot{x}+\gamma\dot{x}+\omega_0^2 x=\frac{F}{m}\right)$$

(ii) RLC 電気回路



$$\underbrace{L\ddot{q}}_{\text{コイル}} + \underbrace{R\dot{q}}_{\text{抵抗}} + \underbrace{\frac{1}{C}q}_{\text{コンデンサ}} = \underbrace{E(t)}_{\text{起電力}}$$

(iii) 生化学反応（2 変数の場合）



濃度： $\ddot{x}-(a+d)\dot{x}+(ad-bc)x=\underbrace{I}_{\text{刺激}}$

一般的特性	バネ （力学）	RLC （電気回路）	生化学反応 （濃度）
独立変数	時間(t)	時間(t)	時間(t)
従属変数	位置(x)	電気量(q)	濃度(x)
慣性 （慣性要素）	質量(m)	インダクタンス(L)	1
抵抗 （減衰要素）	粘性摩擦係数$(c=\gamma m)$	電気抵抗(R)	分解速度$-(a+d)$
かたさ （復元要素）	バネ定数(k)	$\dfrac{1}{\text{電気容量}}$ $\left(\dfrac{1}{C}\right)$	$ad-bc$
固有角振動数 （共振角周波数）	$\omega_0^2=\dfrac{k}{m}$	$\omega_0^2=\dfrac{1}{LC}$	$\omega_0^2=ad-bc$
周期	$T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$	$T=2\pi\sqrt{LC}$	$T=\dfrac{2\pi}{\sqrt{ad-bc}}$

D-4) ヌルクライン

ヌルクラインは、微分法式系を解析するのに有効な方法の一つである。以下の微分方程式

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \quad f_1(x_1, \cdots, x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_2 = \ f_n(x_1, \cdots, x_n) \end{cases}$$

の場合、ヌルクラインとは、$\dot{x}_j = 0$ つまり、$f_j(x_1, \cdots, x_n) = 0$ によって定まる点の集合(つまり平衡曲線)のことである。

まずは簡単のため以下のような生化学反応モデル(総和保存あり)のヌルクラインを考える。

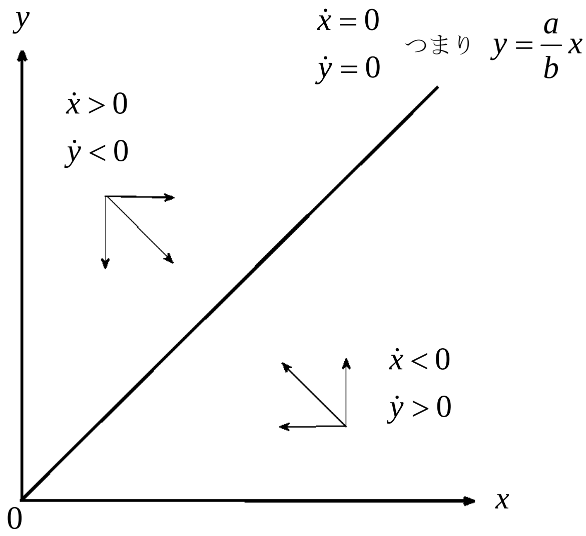
$$x \underset{b}{\overset{a}{\rightleftharpoons}} y$$

$a > 0$, b > 0, $x + y = C$ (定数) とすると　　$x > 0, y > 0, C > 0$

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax + by = 0 \\ \dot{y} = \quad ax - by = 0 \end{cases}$$

の直線がヌルクラインである。

いま、$\dot{x} = -ax + by = 0$ なので、x 成分のヌルクラインは、$-ax + by = 0 \Leftrightarrow y = \frac{a}{b}x$



$\dot{x} = 0$ のとき　　$y = \frac{a}{b}x$

$\dot{x} > 0$ のとき　　$y > \frac{a}{b}x$

$\dot{x} < 0$ のとき　　$y < \frac{a}{b}x$

同様に $\dot{y} = ax - by$ なので $(\because x + y = C)$

y 成分のヌルクラインは、$y = \frac{a}{b}x$

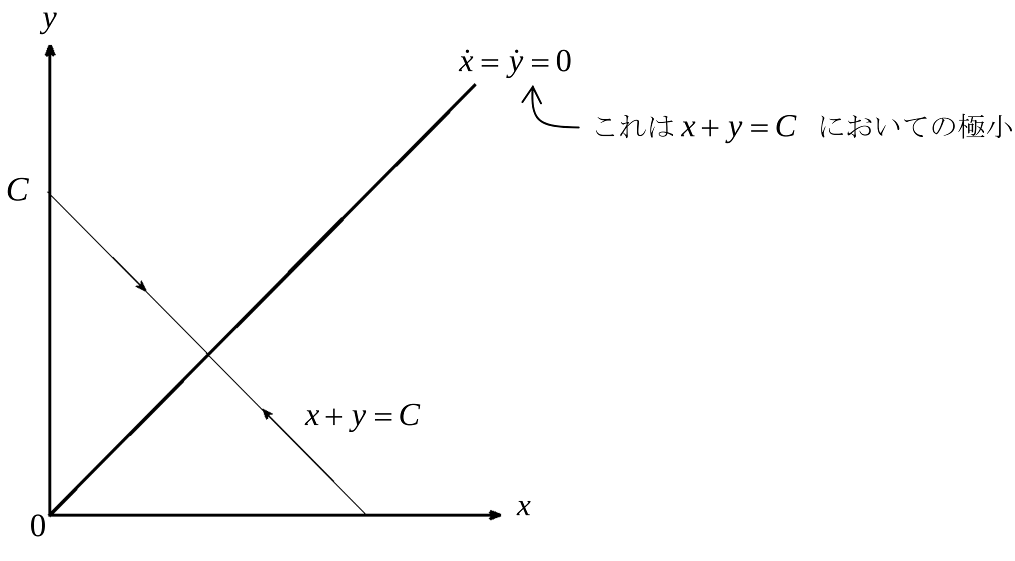
$\dot{y} = 0$ のとき　　$y = \frac{a}{b}x$

$\dot{y} > 0$ のとき　　$y < \frac{a}{b}x$

$\dot{y} < 0$ のとき　　$y > \frac{a}{b}x$

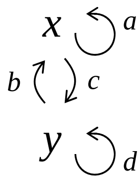
ここで、$x + y = C$ なので

x,y 平面上での解軌道を図示すると以下のようになる。


y
$\dot{x} = \dot{y} = 0$
これは $x + y = C$ においての極小
C
$x + y = C$
0
x

D-5) ヌルクラインと生化学反応式

続いて、一般的な経路を想定した(総和保存がない)右図のような生化学反応を考える。

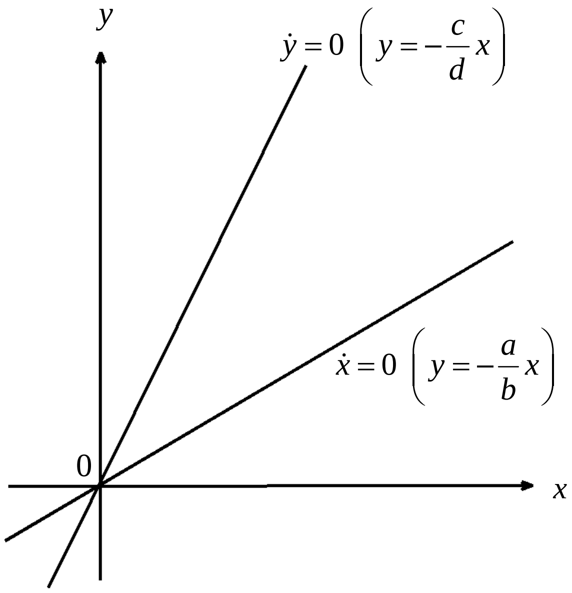


$$\dot{x} = ax + by \quad \text{(D.28)}$$

$$\dot{y} = cx + dy \quad \text{(D.29)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

x, y は負であってもよい。また、その時はある値（平衡点など）からの差を考える。
今、(D.28), (D.29) が下図の場合を考える。（$x = y = 0$ のとき、$\dot{x} = \dot{y} = 0$ となる場合）



$\dot{x} = 0$ のとき　　$y = -\dfrac{a}{b} x$

$\dot{y} = 0$ のとき　　$y = -\dfrac{c}{d} x$

であり、また、左図において、傾きは $\dot{y} = 0$ のほうが $\dot{x} = 0$ より大きく、また右上がりであることから

$$-\frac{c}{d} > -\frac{a}{b} > 0 \qquad \text{(D.30)}$$

ここで b と d が同じ符号とすると $(bd > 0)$

$-bc > -ad$ より　$ad - bc > 0$

また、式(D.30) から $-\dfrac{c}{d} > 0, -\dfrac{a}{b} > 0$ なので

c と d , a と b の符号はそれぞれ反対

上記のケースでは、行列 $J = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の符号には以下の 2 つの場合がある。

$$\text{(i)} \begin{pmatrix} - & + \\ - & + \end{pmatrix} \quad \text{or} \quad \text{(ii)} \begin{pmatrix} + & - \\ + & - \end{pmatrix}$$

(i) のとき

$\dot{x}$ は y が増えれば増加し、$\dot{y}$ は x が増えれば減少する。

つまり、y は x に対して活性化因子(activator)とみなせ、x は y に対して抑制化因子(inhibitor)であるとみなせる。

(ii) のとき

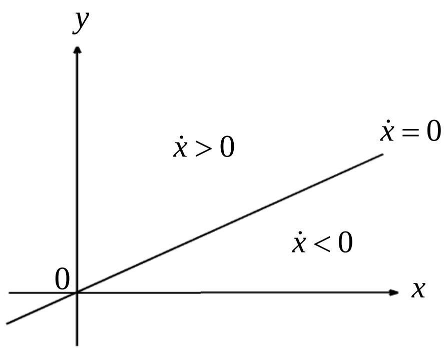
(i) の逆であり、(i) の x と y を入れ替えたものになる。(i) と本質的に変わらない。

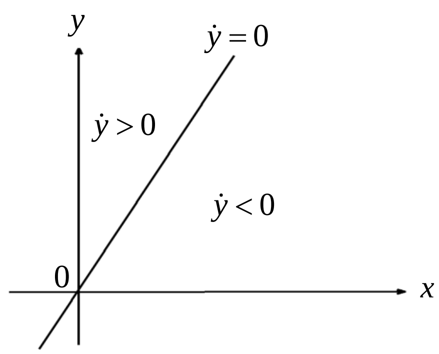
(i) $\begin{pmatrix} - & + \\ - & + \end{pmatrix}$ のときを考える。

$\dot{x}=0$ のとき　$y=-\dfrac{a}{b}x$　　$\dot{y}=0$ のとき　$y=-\dfrac{c}{d}$

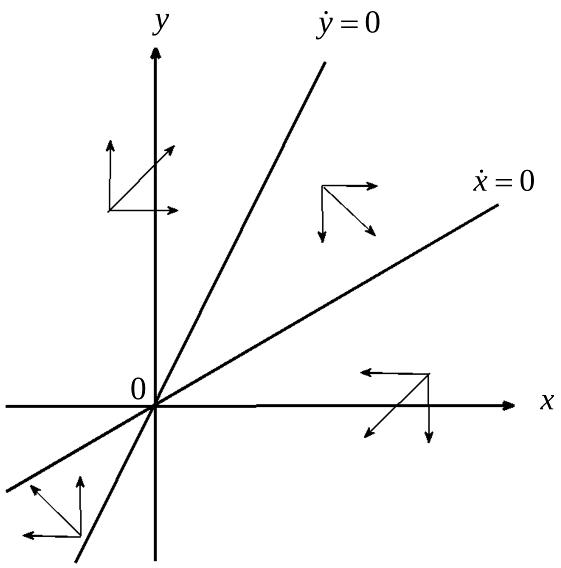
$\dot{x}>0$ のとき　$ax+by>0$ より　$y>-\dfrac{a}{b}x$　　$\dot{y}>0$ のとき　$cx+dy>0$ より　$y>-\dfrac{c}{d}x$

$\dot{x}<0$ のとき　$ax+by<0$ より　$y<-\dfrac{a}{b}x$　　$\dot{y}<0$ のとき　$cx+dy<0$ より　$y<-\dfrac{c}{d}x$





したがって



$\dot{x}=0,\ \dot{y}=0$ で区切られた 4 領域をみると

それぞれ $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$ の方向が異なっており、

時計回りになりうることがわかる。

※ヌルクラインの平衡解が安定か不安定かどうか、また発散振動、減衰振動、収束するのか等に関してはヌルクラインのみでは判定できず、$J=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の $\det J,\ \mathrm{tr}\,J$ の値、及び J の固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2$ の関係によって決まる。ここで再び「D-2) 概念的な生化学反応と力学

系」に立ち戻って確認しておくことをお勧めする。また、「D-6) 平衡点の分類」の表も併せて参照すると良い。

先に挙げたヌルクラインの解の挙動を調べてみると、

$\det J > 0$,および下の表から

・$\mathrm{tr}\,\mathrm{J} = a + d = 0$ のとき　振動し続ける（摩擦がない場合($\gamma = 0$)に相当、つまり単振動）

・$\mathrm{tr}\,\mathrm{J} = a + d < 0$ のとき　振動しながら or 振動せずにある一点（この場合は原点）に収束

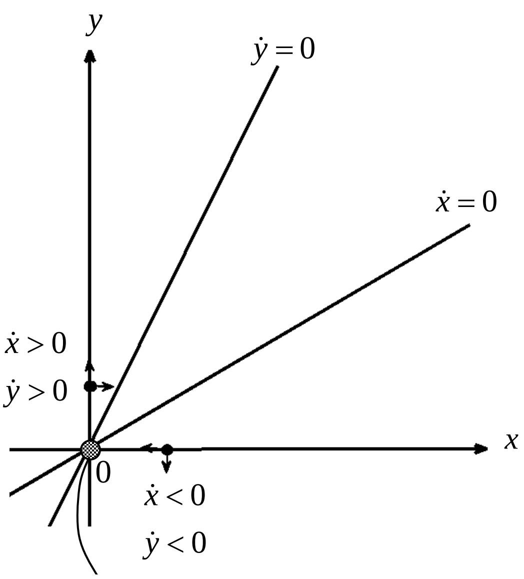
このとき、振動するのは $\dfrac{-\left(a+d\right)}{2\sqrt{ad-bc}} < 1$ のとき　$\left(\det A > \dfrac{(\mathrm{tr}\,A)^2}{4} \text{のとき}\right)$

・$\mathrm{tr}\,\mathrm{J} = a + d > 0$ のとき　振動しながら or 振動せずに発散

<u>※グラフから行列 J の符号を判定する方法</u>

平衡点（$\dot{x} = \dot{y} = 0$ の点、すなわちヌルクラインの交点）を x の正方向へ少しだけずらすと、その点における $\dot{x}, \dot{y}$ の符号がそれぞれ a, c の符号となる。

同様に、平衡点から y の正方向へ少しだけずらした点における $\dot{x}, \dot{y}$ の符号がそれぞれ b, d の符号となる。



先述した例では、左図より

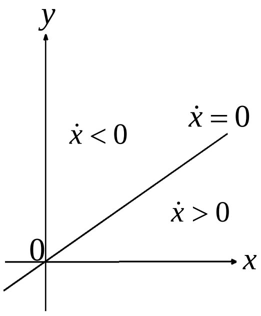
$$\begin{pmatrix} - & + \\ - & + \end{pmatrix}$$

平衡点から x 正方向へ少しずらした点における $\dot{x}, \dot{y}$ の符号

平衡点から y 正方向へ少しずらした点における $\dot{x}, \dot{y}$ の符号

ここで、ヌルクラインは同じで行列 J の符号が異なる他の 3 つの場合について同様の考察を行う。

まず、先述の (ii) $\begin{pmatrix} + & - \\ + & - \end{pmatrix}$ の場合を考える。これは、b と d の符号が同じ時である。



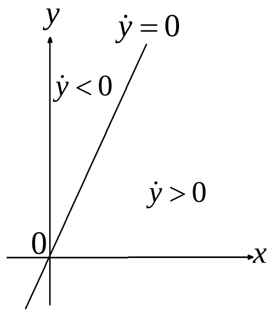
$\dot{x}=0$ のとき　$y=-\dfrac{a}{b}x$

$\dot{x}>0$ のとき $ax+by>0$

$\therefore y<-\dfrac{a}{b}x$

$\dot{x}<0$ のとき $ax+by<0$

$\therefore y>-\dfrac{a}{b}x$



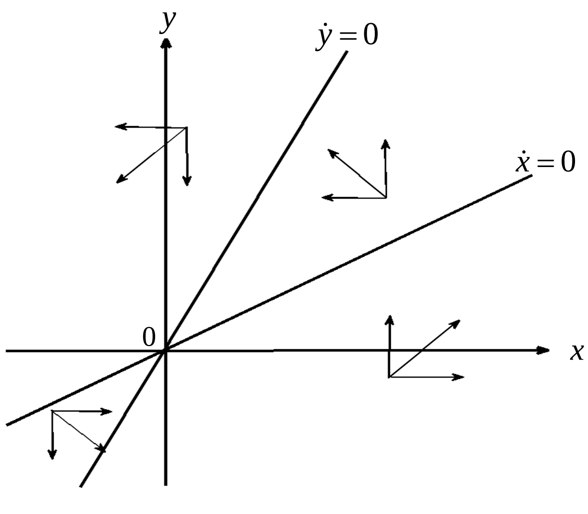
$\dot{y}=0$ のとき　$y=-\dfrac{c}{d}$

$\dot{y}>0$ のとき $cx+dy>0$

$\therefore y<-\dfrac{c}{d}x$

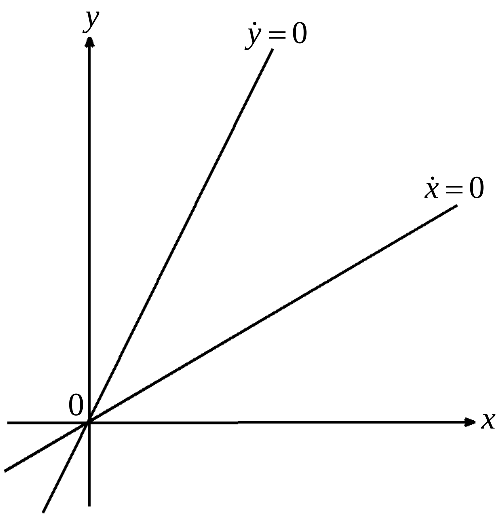
$\dot{y}<0$ のとき $cx+dy<0$

$\therefore y>-\dfrac{c}{d}x$



このとき、振動する場合は反時計回りとなる。

次に、b と d の符号が異なる場合を考える。



傾きから　　$-\dfrac{c}{d}>-\dfrac{a}{b}>0$

ここで b と d の符号は異なり $bd<0$ なので

$-bc<-ad \quad \therefore ad-bc<0$

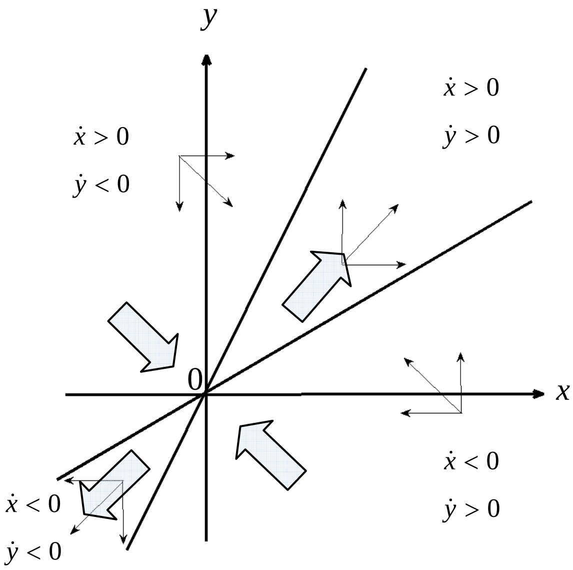
つまり　　　　$\det J<0$

また $-\dfrac{c}{d}>0,\ -\dfrac{a}{b}>0$ より

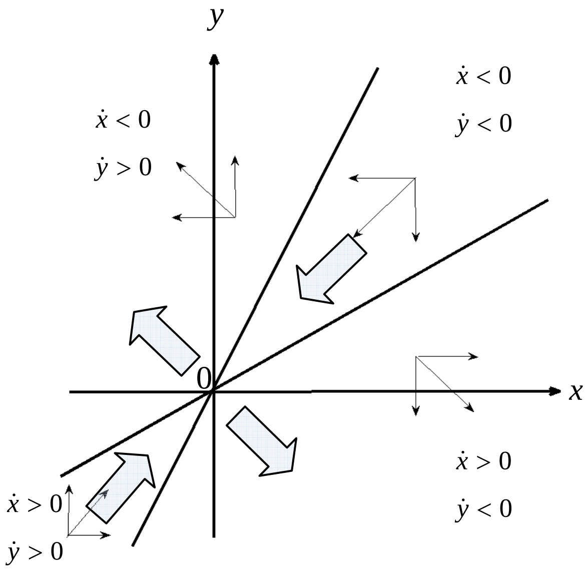
以下の 2 通りが考えられる。

$$\text{(iii)}\begin{pmatrix} - & + \\ + & - \end{pmatrix} \quad \text{or} \quad \text{(iv)}\begin{pmatrix} + & - \\ - & + \end{pmatrix}$$

(iii) について考えると



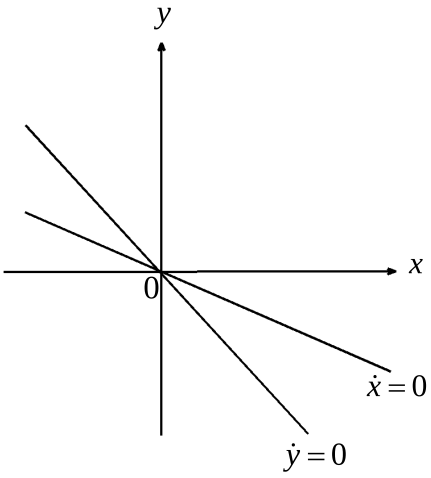
(iv) について考えると



上図よりどちらもサドル型となる。
一方の固有ベクトルは時間とともに収束し、他方の固有ベクトルは時間とともに発散する。

また、ヌルクラインが以下のような場合も考えてみよう。

傾きから　$-\dfrac{c}{d} < -\dfrac{a}{b} < 0$



$bd > 0$ (b と d が同符号)のとき　$ad - bc < 0$　($\det J < 0$)

$bd < 0$ (b と d が異符号)のとき　$ad - bc > 0$　($\det J > 0$)

振動するためには $\det J > 0$ 、すなわち $bd < 0$ が<u>必要</u>

(I) $b > 0$ かつ $d < 0$ のとき

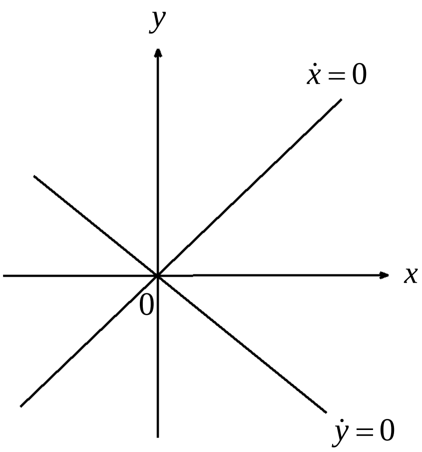
$-\dfrac{c}{d} < 0,\ -\dfrac{a}{b} < 0$ より $a > 0$ かつ $c < 0$　　$\therefore \begin{pmatrix} + & + \\ - & - \end{pmatrix}$

(II) $b < 0$ かつ $d > 0$ のとき

$-\dfrac{c}{d} < 0,\ -\dfrac{a}{b} < 0$ より $a < 0$ かつ $c > 0$　　$\therefore \begin{pmatrix} - & - \\ + & + \end{pmatrix}$

以上の条件で、 $\mathrm{tr}\, J \geq 0$ のとき振動（発散）

また、以下の場合　　傾きから　$-\dfrac{a}{b} > 0 > -\dfrac{c}{d}$



$bd > 0$ (b と d が同符号)のとき　$ad - bc < 0$　($\det J < 0$)

$bd < 0$ (b と d が異符号)のとき　$ad - bc > 0$　($\det J > 0$)

上の例と同様に、振動の必要条件 $bd < 0$ を考えると

(I) $b > 0$ かつ $d < 0$ のとき

$-\dfrac{a}{b} > 0,\ 0 > -\dfrac{c}{d}$ より $a < 0$ かつ $c < 0$　　$\therefore \begin{pmatrix} - & + \\ - & - \end{pmatrix}$

(II) $b < 0$ かつ $d > 0$ のとき

$-\dfrac{a}{b} > 0,\ 0 > -\dfrac{c}{d}$ より $a > 0$ かつ $c > 0$　　$\therefore \begin{pmatrix} + & - \\ + & + \end{pmatrix}$

(I) の場合、$\mathrm{tr}\, J < 0$ なので**減衰振動**する。

(II) の場合、$\mathrm{tr}\, J > 0$ なので**発散振動**する。

D-6) 平衡点の分類

(I) 安定結節点

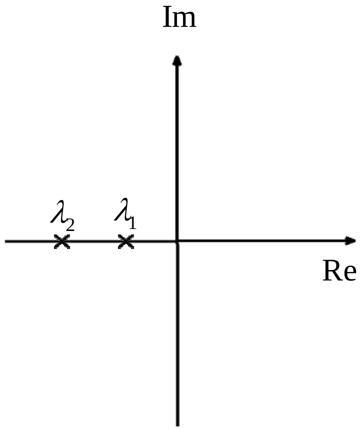
解は収束する

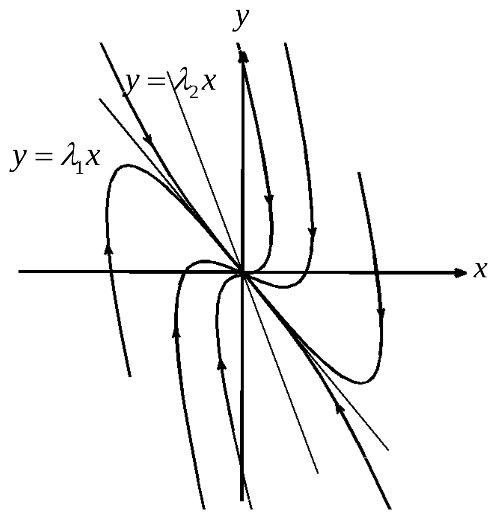
＜条件＞

$\det J > 0$

$\operatorname{tr} J < 0$

$\det J < \frac{1}{4}(\operatorname{tr} J)^2$





(II) 不安定結節点

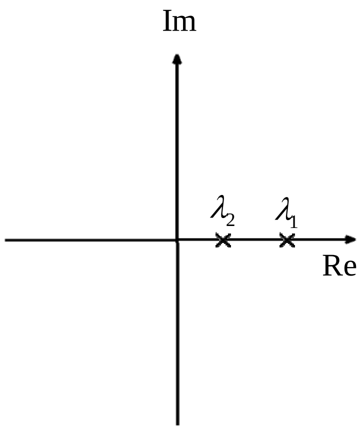
解は発散する

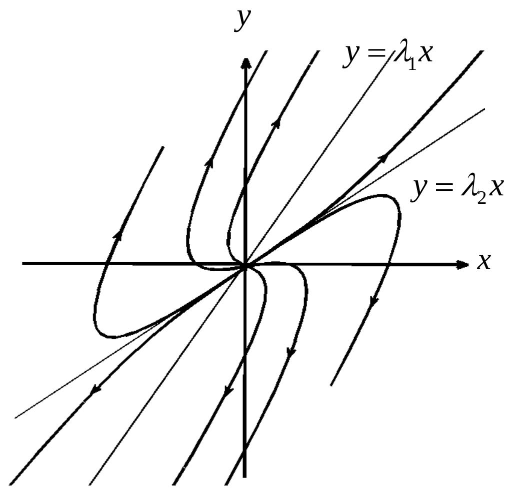
＜条件＞

$\det J > 0$

$\operatorname{tr} J > 0$

$\det J < \frac{1}{4}(\operatorname{tr} J)^2$



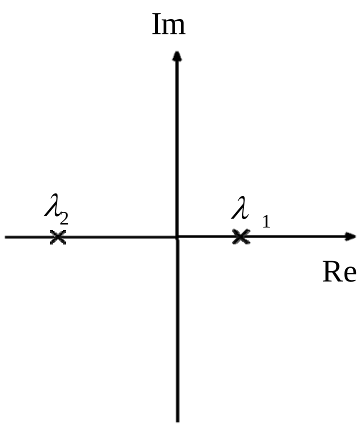


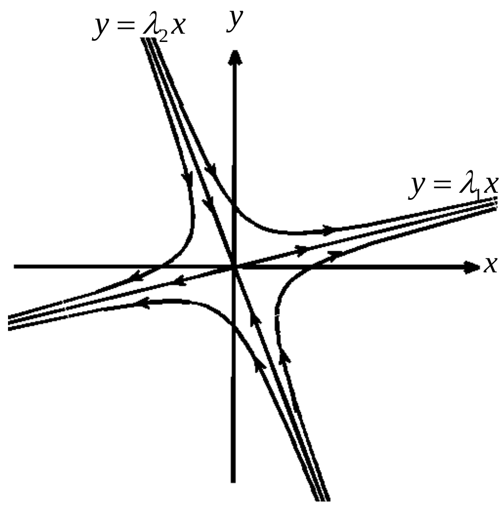
(III) 鞍点

解はサドル型になる

＜条件＞

$\det J < 0$





(IV) **安定焦点**

（渦状点）

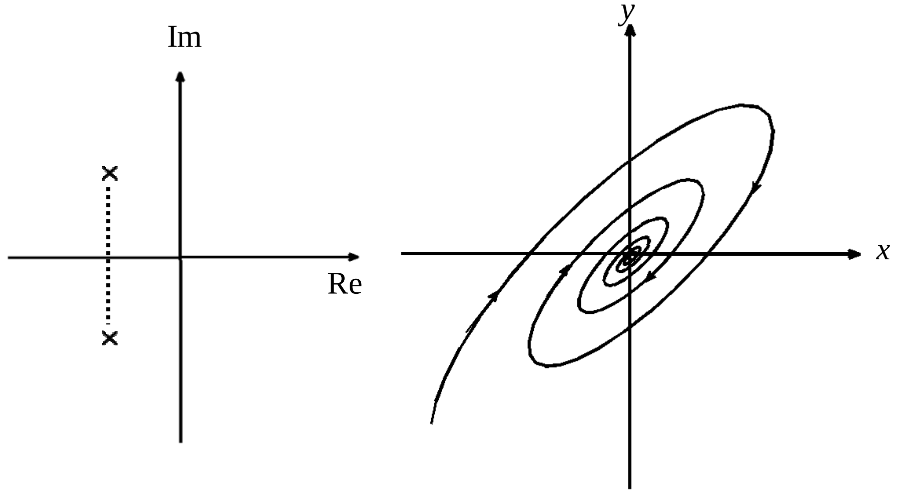
解は減衰振動する

＜条件＞

$\det J > 0$

$\mathrm{tr}\, J < 0$

$\det J > \dfrac{1}{4}\left(\mathrm{tr}\, J\right)^2$



(V) **不安定焦点**

（渦状点）

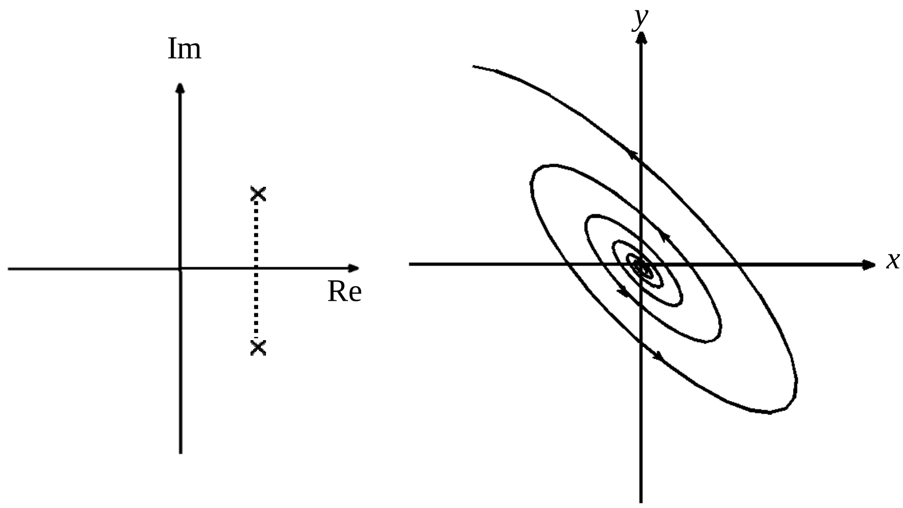
解は発散振動する

＜条件＞

$\det J > 0$

$\mathrm{tr}\, J > 0$

$\det J > \dfrac{1}{4}\left(\mathrm{tr}\, J\right)^2$



(VI) **中心点**

（渦心点）

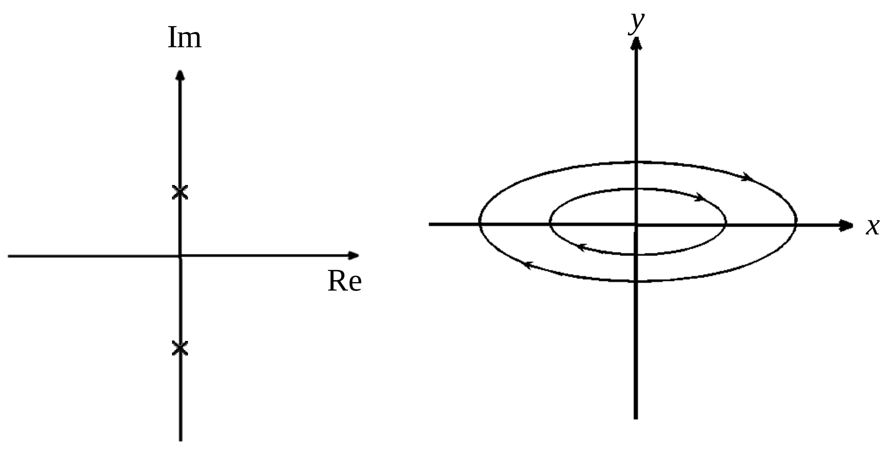
解はリミットサイクルを描く

＜条件＞

$\det J > 0$

$\mathrm{tr}\, J = 0$

$\det J > \dfrac{1}{4}\left(\mathrm{tr}\, J\right)^2$



なお、本文２-３)で示したモデルにおいて、ネガティブフィードバック単独のときの振動は(IV) 安定焦点型になり、ネガティブフィードバックとポジティブフィードバックの組み合わせによる振動は(VI) 中心点型になる。