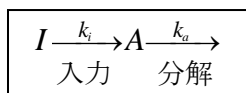


付録 C. 1 次反応と周波数応答

C-1) 1 次反応の微分方程式の導出と一般解

以下のように、分子 A に入力 I および分解が伴うような 1 次反応を考える。ただし、ここでは簡単のため、 I は時刻によらず一定であるとする。



このとき、 A の濃度の変化速度は以下のような微分方程式で記述できる。

$$\begin{aligned}\frac{dA}{dt} &= -k_a A + k_i I \\ \therefore \frac{1}{k_a} \frac{dA}{dt} &= \frac{k_i}{k_a} I - A\end{aligned}$$

ただし、 $\frac{dA}{dt}$ は A の時間微分を表し、 $t \geq 0$ とする。

簡単のため、 $k_i = k_a$ とすれば

$$\frac{1}{k_a} \frac{dA}{dt} = I - A$$

$\tau = 1/k_a$ とおくと

$$\tau \frac{dA}{dt} = I - A \tag{C.1}$$

を得る。

では次に、この微分方程式を解いてみよう。まず、式(C.1) を変形して

$$\begin{aligned}\frac{1}{I - A} \cdot \frac{dA}{dt} &= \frac{1}{\tau} \\ \therefore \frac{1}{A - I} dA &= -\frac{1}{\tau} dt\end{aligned}$$

両辺を積分すれば

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{A - I} dA &= \int -\frac{1}{\tau} dt \\ \therefore \log|A - I| &= -\frac{1}{\tau} \cdot t + C \quad (C \text{ は積分定数}) \\ \therefore A - I &= e^c \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \\ \therefore A &= e^c \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + I\end{aligned}$$

$t = 0$ のとき $A = 0$ とすれば、これを上式に代入して

$$e^c = -I$$

が得られる。

よって A の一般解は

$$A = -I \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + I$$
$$\therefore A(t) = I \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (\text{C.2})$$

これを図示すると図 c-1 のようになる。

ここで、 $t \rightarrow \infty$ とすると $A \rightarrow I$ となる。

$t \rightarrow \infty$ で十分時間が経過したときの状態は

定常状態と呼ばれ、この場合、 A は十分時間経過後、一定値 I をとる定常状態となることがわかる。

また、初期条件から定常状態に至るまでの途中の経過を**過渡状態**という。

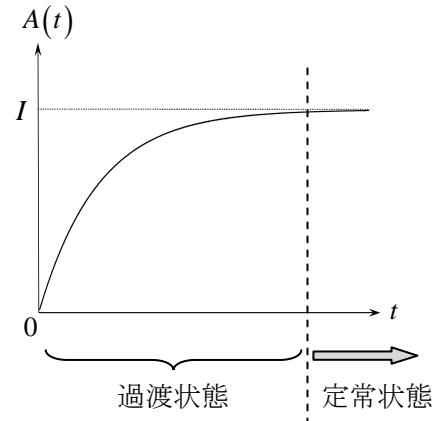


図 c-1

※このシステムは、空気抵抗のある場合の自由落下運動と原理的に同じである。一定入力を重力、出力を速度と考えた場合、速度は空気抵抗によってある一定の速度（終端速度）に近づく。

C-2) 時定数 τ について

C-1) で $\tau = 1/k_a$ とおいたのは、式を見やすくするためだけではない。この τ は**時定数**と呼ばれ、応答の速さを特徴づける指標として非常に重要な値なのである。

一般に時定数 τ が大きいときは入力に対する出力の応答が遅いことを、 τ が小さいときは入力に対する出力の応答が早いことを示している。つまり C-1) の例では、時定数が大きくなるにつれて、 $A(t)$ が定常状態に至るまでに時間がかかる。数学的には、曲線

$A(t) = I \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ の $t = 0$ における接線 $A(t) = \frac{I}{\tau} \cdot t$ と直線 $A(t) = I$ との交点の x 座標が τ と

なる。(つまり、 τ が大きくなると、接線 $A(t) = \frac{I}{\tau} \cdot t$ の傾きがなだらかになるため、立ち上がりが遅くなる)

それでは、 $t = \tau$ のときに A は一体どのような値になっているのだろうか。

式(C.2) に $t = \tau$ を代入して、このときの A の値を A_τ とすると

$$\begin{aligned} A_\tau &= I \cdot (1 - e^{-1}) \\ &= I \cdot \left(1 - \frac{1}{e}\right) \end{aligned}$$

これは収束値 (最大値) I の $\left(1 - \frac{1}{e}\right) \approx 0.632$ 倍になっている。

この値は式(C.1) で記述されるどのようなシステムにおいても同じ値になる。

このことから、時定数とは、収束値 (定常状態) の 63.2 % の値に達するまでの時間と考えることもできる。

(図 c-9 も参照のこと)

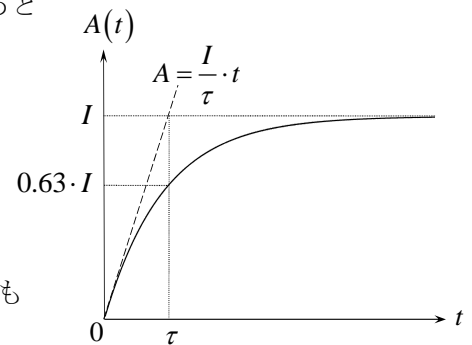


図 c-2

C-3) leaky integrator

C-1) で扱った 1 次反応と同様のシステムは、神経細胞の電気的活動においても見受けられる。

いま、神経細胞の細胞膜の回路モデルとして、図 c-3 のような回路を考えることができる。ここで、 V_r は静止膜電位、 R_m は膜抵抗、 C は膜容量を表している。

この系に一定電流 I を加えたときの膜電位応答 V を調べてみよう。

コンデンサーに蓄えられた電荷量を Q とすると、
コンデンサーの公式より

$$Q = CV \quad (C.3)$$

抵抗側に流れる電流を I_R 、
コンデンサー側に流れる電流を I_C とすると

$$I = I_R + I_C \quad (C.4)$$

ここで、 $I_C = \frac{dQ}{dt}$ 、 $V = R_m I_R + V_r$ なので

$$I = I_R + I_C = \frac{V - V_r}{R_m} + \frac{dQ}{dt} \quad (C.5)$$

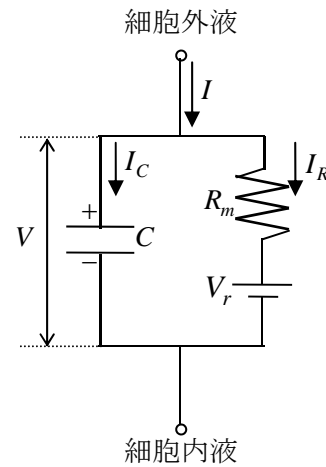


図 c-3

式(C.3) を式(C.5) へ代入すれば

$$I = \frac{V - V_r}{R_m} + \frac{d(CV)}{dt}$$

$$C \frac{dV}{dt} = -\frac{V - V_r}{R_m} + I$$

$$CR_m \frac{dV}{dt} = -(V - V_r) + IR_m$$

ここで

$$\tau = CR_m$$

とおけば

$$\tau \frac{dV}{dt} = \underbrace{-(V - V_r)}_{\text{漏れ}} + \underbrace{IR_m}_{\text{一定入力}} \quad (C.6)$$

が得られる。

式(C.6) において、 $-(V - V_r)$ は漏れを、 IR_m は一定の入力を表している。このようなシステムを **leaky integrator (漏れ積分回路)** という。

上式において $R_m = 1$ 、 $V_r = 0$ としてみれば、式(C.1)と同じ形をしていることが一目瞭然で

ある。

C-1) のときと同様にして、式(C.6) の一般解を求めると式(C.6)より

$$\frac{dV}{(V - V_r) - IR_m} = -\frac{1}{\tau} dt$$

両辺を積分すれば

$$\int \frac{dV}{V - (V_r + IR_m)} = \int -\frac{1}{\tau} dt$$

$$\log|V - (V_r + IR_m)| = -\frac{t}{\tau} + C$$

$$V - (V_r + IR_m) = e^c \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$t=0$ のとき $V=V_0$ として上式に代入すると

$$e^c = V_0 - (V_r + IR_m)$$

が得られる。

よって V の一般解

$$V = V_r + IR_m + \{V_0 - (V_r + IR_m)\} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (\text{C.7})$$

が得られる。

ここで $V_0 = V_r$ とするとき、式(B.7)は

$$\begin{aligned} V &= V_r + IR_m + \{V_r - V_r - IR_m\} e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= V_r + IR_m \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

と書ける。

時間変化の様子は図 c-4 のようになる。

$t \rightarrow \infty$ とすると $V \rightarrow V_r + IR_m$ となり、膜電位は十分時間経過後、一定値 $V_r + IR_m$ へ落ち着く。この例では、時定数が大きくなるにつれて、細胞の膜電位の上昇 (or 下降) が遅くなる。

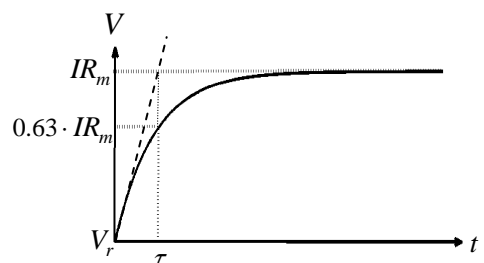


図 c-4

C-4) 周波数応答解析について

さて、ここまでは一定の刺激（入力）に対して系がどのような応答を示すか、ということ調べた。しかし、本文中にも記述したように、実際の細胞内では刺激は時間とともに変動している場合がほとんどであると考えられるので、時間変動する刺激を加えた場合に系がどのような応答を示すのか、ということ調べることも重要である。そのような刺激のパターンは無数に存在しているが、解析上に非常に便利なので、ここでは代表して正弦波刺激を扱うこととする。（実際には、この本で扱っているようなシステム（線形システム）では正弦波を入力として与えると、定常状態では出力も同周波数を持つ正弦波になること、また、現実的なあらゆる入力の波形は正弦波の重ね合せで表現できるので、とりあえず正弦波刺激を扱えば十分であること、などが詳しい理由である）

正弦波のような周期的な入力刺激を与える場合、その入力刺激の持つ**周波数**（1秒あたりに何周期するかを表す量）が重要となる。そこで、様々な周波数を持つ正弦波を与えて、システムがどのような応答を示すか、ということ調べる。先ほど少し触れたが、この本で扱う線形のシステムは、入力として正弦波を与えると、出力も同じ周波数を持つ正弦波となるので、正弦波応答を調べても意味がないように思えるかもしれない。しかしながら、周波数は同じであっても、**振幅**や**位相**は入力と異なる。そのため、線形システムであることと波形が正弦波の重ね合せからなることを踏まえると、様々な周波数に対する振幅と位相の変化を調べるだけで、そのシステムの入出力特性を十分に知ることができるのである。このような考えに基づき、様々な周波数の正弦波を与えて、システムの応答（振幅や位相の変化）を追うことを**周波数応答解析**という。

また、これまで時間領域での変化を見ていたときは、定常状態に至るまでの挙動（過渡特性）を主に見ていたが、周波数応答解析では、あくまで定常状態に着目しているということも併せて心に留めておいていただきたい。

さて、周波数応答解析と書いたが、実際には周波数[Hz]ではなく**角周波数[rad/s]**を用いることが多い。単にそのほうが解析上便利だからである。振動を円運動に置き換え、1周期を円運動の1周分としたとき、1周で角度は 2π [rad] 変化する。この角度の変化に注目して、1秒あたりの角度の変化量[rad] を角周波数 ω [rad/s] と定義する。

このとき、 t 秒の間に角度は ωt [rad] だけ変化するので、周期 T 秒の間には ωT [rad] 変化する事になり、これが 2π [rad] に相当するはずである。つまり、角周波数 ω と周期 T との間には

$$\omega T = 2\pi$$

$$\therefore \omega = \frac{2\pi}{T}$$

の関係がある。また、周波数 $f = 1/T$ なので、周波数 f と角周波数 ω との間には

$$\omega = 2\pi f$$

の関係がある。

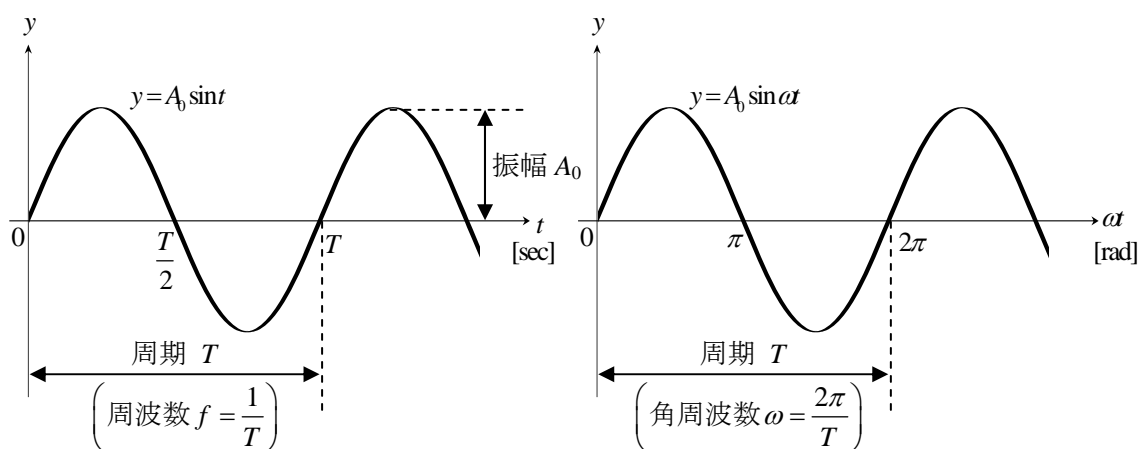


図 c-5

次に位相のズレについて触れておく。そもそも位相とは何かという話から始めよう。簡単に言えば、あるシステムに加える正弦波入力を $y = A_0 \sin \omega t$ とすると、 ωt のことを位相という。つまり、厳密ではないが \sin なり \cos なりの三角関数の中身のことを位相と考えてもらえばよい。したがって、 $y = A' \sin(\omega t + \delta)$ という出力が得られた場合、出力の位相は $\omega t + \delta$ となり、出力は入力に対して δ だけ位相がズレたことになる。この δ を**位相差**という。また、 $\delta > 0$ の場合、出力は入力に対して位相が**進んだ**ことを意味し、逆に $\delta < 0$ の場合は、出力は入力に対して位相が**遅れた**ことになる。(図 c-6 参照)

このように、位相差というのは相対的なものとして定義されるので、多くの場合、入力の位相を基準として、出力の位相が入力の位相に対してどれだけズレたか、ということを見る。そのため、入力の刺激は位相のズレを考慮せずに $I = I_0 \sin \omega t$ などとおいて、出力は入力の位相に対して δ ズれるものとして $A = A_0 \sin(\omega t + \delta)$ などとおくことが多い。(遅れるか進むかは最終的に δ の符号で判断できるのでこの時点では気にしなくてよい)

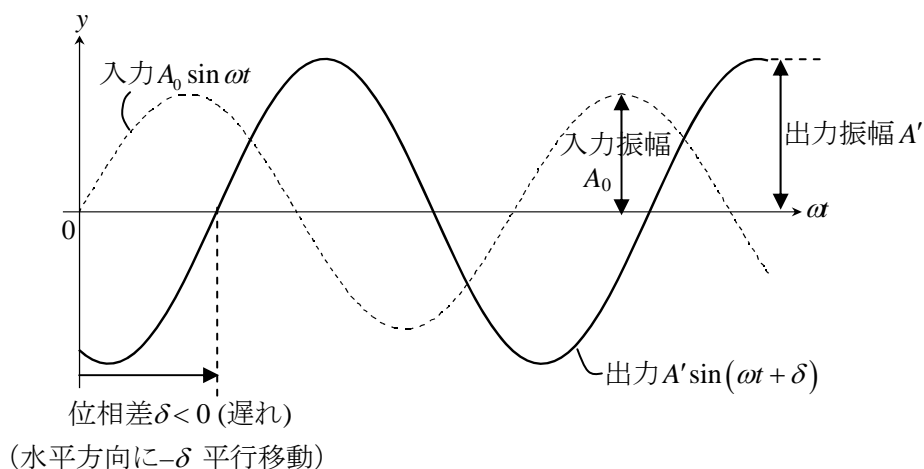
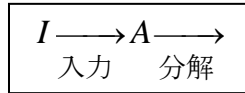


図 c-6

C-5) 1 次反応における周波数応答について

さて、前置きが長くなってしまったが、早速本文 1-3) および付録 C-1) で扱った以下の 1 次反応における周波数応答について調べてみよう。



この反応は微分方程式

$$\tau \frac{dA}{dt} = I - A$$

で与えられる。ここで、 $\frac{dA}{dt} = \dot{A}$ と書くとする (単に式を見やすくするため)

$$\tau \dot{A} + A = I \tag{C.9}$$

いま、入力 I が正弦波刺激 $I(t) = I_0 \sin \omega t$ で与えられるとする。すると式(C.9) は

$$\tau \dot{A} + A = I_0 \sin \omega t \tag{C.10}$$

となる。

さて、C-4) でも述べたが、この反応における出力を A とすれば定常状態では出力 A も入力と同じ周波数をもった正弦波になり (概念的には、外部から強制的に振動させられているので、時間がたてば同じ周波数で一緒に振動するはずである)、振幅と位相のみが入力と異なっているはずである。つまり、出力の振幅 A_0 および入力との位相差 δ を未知数とすれば、出力 A 、すなわち式(C.10) の解は

$$A(t) = A_0 \sin(\omega t + \delta) \tag{C.11}$$

と仮定できる。

これを式(C.10) へ代入すれば、 ω に対する出力振幅 A_0 と入力振幅 I_0 との関係がわかりそうである。しかし、これでは計算が煩雑になってしまい、あまり計算する気が起こらない。そこで、強力なツールを使うことにしよう。

それは**オイラーの公式**

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \tag{C.12}$$

である (ただし、 i は虚数単位で、 $i^2 = -1$ を満たす)。

これに、 $\theta = \omega t + \delta$ を代入して、両辺に A_0 を掛けると

$$A_0 e^{i(\omega t + \delta)} = A_0 \cos(\omega t + \delta) + i A_0 \sin(\omega t + \delta) \tag{C.13}$$

ここで式(C.11) と式(C.13) を見比べると、式(C.11) は式(C.13) の虚数部分になっていることがわかる。つまり

$$A(t) = A_0 \sin(\omega t + \delta) = \text{Im} \left[A_0 e^{i(\omega t + \delta)} \right]$$

である。($\text{Im}[a + bi]$ は複素数 $a + bi$ の虚部 b を意味する。実部は $\text{Re}[a + bi] = a$ となる)

ついでに位相のズレ δ を分離してしまうと

$$A(t) = \text{Im} \left[A_0 e^{i(\omega t + \delta)} \right] = \text{Im} \left[A_0 e^{i\delta} \cdot e^{i\omega t} \right] = \text{Im} \left[\hat{A} e^{i\omega t} \right] \quad (\text{ただし } \hat{A} = A_0 e^{i\delta} \text{ とおいた})$$

同様に、入力 $I(t) = I_0 \sin \omega t$ についてもオイラーの公式(C.12) で $\theta = \omega t$ を代入すれば

$$I(t) = I_0 \sin \omega t = \text{Im} \left[I_0 \cos \omega t + i \cdot I_0 \sin \omega t \right] = \text{Im} \left[I_0 e^{i\omega t} \right] = \text{Im} \left[\hat{I} e^{i\omega t} \right]$$

が得られる。(ただし $\hat{I} = I_0$ とおいた)

このとき、振幅は複素数表示した値の大きさとなるので、絶対値を取れば得られる。つまり、入力振幅は $|\hat{I}|$ 、出力振幅は $|\hat{A}|$ と表わされる。ただし、 $||$ は絶対値を表し、 $|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$ を満たす。(厳密には \hat{I} は $\hat{I} = I_0$ なので、入力振幅は絶対値を取らなくてもよい)

よって、 $A(t)$ を $\hat{A} e^{i\omega t}$ の虚数部分、 $I(t)$ を $\hat{I} e^{i\omega t}$ の虚数部分と考え、 $A(t) = \hat{A} e^{i\omega t}$ 、 $I(t) = \hat{I} e^{i\omega t}$

として式(C.9) に代入してみよう。(これを解の複素数表示という)

すると式(C.9) は指数関数の形で書け、計算が非常に楽になるのだ。(e^x という関数は微分が $(e^x)' = e^x$ のように非常に簡素な形で記述できるため)

このとき A を時間微分した \dot{A} は

$$\dot{A} = \left(\hat{A} e^{i\omega t} \right)' = i\omega \hat{A} e^{i\omega t}$$

と表わされるので、式(C.9) に $I = \hat{I} e^{i\omega t}$ 、 $A = \hat{A} e^{i\omega t}$ 、 $\dot{A} = i\omega \hat{A} e^{i\omega t}$ を代入すると

$$\tau i \omega \hat{A} e^{i\omega t} + \hat{A} e^{i\omega t} = \hat{I} e^{i\omega t}$$

$$\therefore (1 + \tau i \omega) \hat{A} = \hat{I}$$

$$\therefore \hat{A} = \frac{1}{1 + \tau i \omega} \hat{I}$$

いま、入力に対して出力がどれほど変化するか(増幅されるか)ということが知りたい情報なので、これらの比 \hat{A}/\hat{I} を考えると

$$\frac{\hat{A}}{\hat{I}} = \frac{1}{1 + \tau i \omega} \quad (\text{C.14})$$

が得られる。この入出力の比 \hat{A}/\hat{I} を **周波数応答関数** といい、角周波数 ω の関数となる。

さて、周波数応答解析で知りたい情報は入出力における振幅および位相の変化であった。そこで、まず振幅の変化を考えよう。入出力の振幅比は $|\hat{A}|/|\hat{I}|$ で与えられるので、式(C.14) において両辺の絶対値をとれば

$$\left| \frac{\hat{A}}{\hat{I}} \right| = \frac{1}{|1 + \tau i \omega|}$$

が得られる。この入出力の振幅比 $\left| \frac{\hat{A}}{\hat{I}} \right|$ を **gain (ゲイン、利得)** と呼び、入出力間における伝達の効率を表す尺度となる。(当然、gain も ω の関数になる)

したがって

$$\mathbf{gain} = \left| \frac{\hat{A}}{\hat{I}} \right| = \frac{1}{|1 + \tau i \omega|} \quad (\text{C.15})$$

絶対値を外すため、両辺を2乗すると

$$\left| \frac{\hat{A}}{\hat{I}} \right|^2 = \frac{1}{|1 + \tau i \omega|^2} = \frac{1}{(1 + \tau i \omega)(1 - \tau i \omega)} = \frac{1}{1 + \tau^2 \omega^2}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{複素共役 } (|z|^2 = z \cdot \bar{z})}$

$$\therefore \mathbf{gain} = \left| \frac{\hat{A}}{\hat{I}} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}}$$

これより、gain を ω の関数として見て、横軸に ω 、縦軸に gain をとって図示すると図 c-7(上) のようになる。

また、これを両対数グラフで描くと図 c-7(下) のようになる。

このとき図 c-7(下) を見ると

$$\tau^2 \omega^2 \gg 1 \text{ で } \log(\mathbf{gain}) = -\log(\tau \omega) \dots \text{直線①}$$

$$\tau^2 \omega^2 \ll 1 \text{ で } \log(\mathbf{gain}) = -\log 1 = 0 \dots \text{直線②}$$

であり、直線①と②は1つの交点を持つことがわかる。

この交点における周波数を**カットオフ(角)周波数**という。

カットオフ角周波数を ω_c とすると

$$-\log(\tau \omega_c) = 0$$

$$\tau \omega_c = 1$$

$$\therefore \omega_c = \frac{1}{\tau}$$

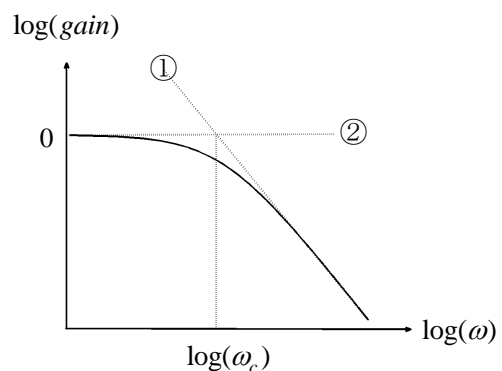
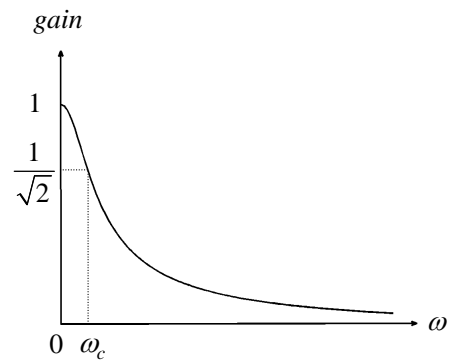


図 c-7

※カットオフ周波数 f_c は $\omega_c = 2\pi f_c$ より $f_c = \frac{1}{2\pi\tau}$ である。

続いて、位相差 δ について調べてみよう。

まず δ が入った式を作るため、式(C.14)に、 $\hat{A} = A_0 e^{i\delta}$ および $\hat{I} = I_0$ を代入すると

$$\frac{A_0 e^{i\delta}}{I_0} = \frac{1}{1 + \tau i \omega}$$

$$\therefore e^{-i\delta} = \frac{A_0}{I_0} (1 + \tau i \omega)$$

オイラーの公式より $e^{-i\delta} = \cos \delta - i \sin \delta$ なので

$$\cos \delta - i \sin \delta = \frac{A_0}{I_0} (1 + \tau i \omega)$$

両辺を比較すると

$$\begin{cases} \cos \delta = \frac{A_0}{I_0} \\ \sin \delta = -\frac{A_0}{I_0} \tau \omega \end{cases}$$

が得られる。

したがって

$$\tan \delta = -\tau \omega$$

$$\therefore \delta = -\tan^{-1}(\tau \omega)$$

これを片対数グラフで図示すると

図 c-8 のようになる。

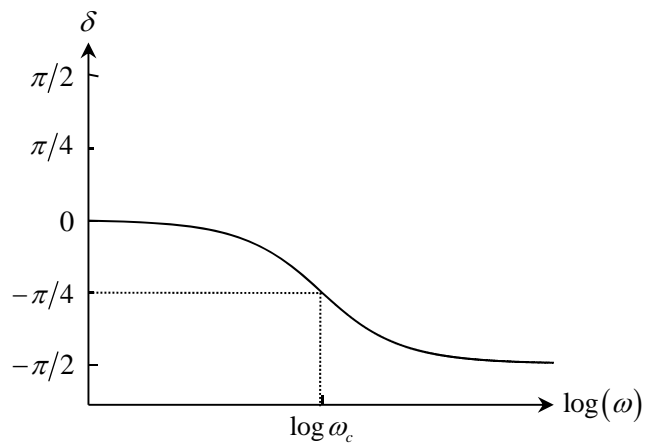


図 c-8

これより、位相差は常に負であり（つまり位相は常に遅れる）、最大 $\pi/2$ まで位相が遅れることがわかる。また、低周波領域では位相の遅れがほとんどない一方で、高周波領域では角周波数 ω の値によらずに位相の遅れは $\pi/2$ になることがわかる。

以上のように、あるシステムの周波数応答を知るためには、周波数に対する *gain* および位相差の関係を調べればよい。また、図 c-7 (下) および c-8 のように、周波数と *gain* の関係を示したグラフおよび周波数と位相差の関係を示したグラフを上下に並べて描いたものを**ボード線図 (Bode plot)**といい、システムの周波数特性を直感的に理解するのに役立つ。

※ただし、本書においては話を簡単にするため、位相差については考慮せず、周波数と *gain* との関係のみを周波数応答特性として調べている。

いきなり複素数などが出てきて戸惑ったかもしれないが、このような解析は工学の分野では常套手段であるので、あまり深くは考えず、計算に便利だからと割り切って用いるのが望ましい。最初なのでここでは丁寧に説明したが、これからはあまり細かいことは気にせずに、 $A(t) = \hat{A} e^{i\omega t}$ などにおいて、微分方程式に代入してしまおう。

C-6) カットオフ周波数について

C-5) でカットオフ周波数なるものが登場したが、ここではこの値について詳しく触れておく。

カットオフ周波数（遮断周波数、コーナー周波数ともいう）はその名の通り、ある系に入力があるときに、入力信号のうち通過させる周波数成分と、遮断させる周波数成分の境界になる周波数のことを指す。

図 c-4 の例では、カットオフ周波数以下の周波数成分は通しているが（ある一定レベルの *gain* が得られている）、それ以上の周波数を持つ成分は遮断（*gain* が急激に低下）している。つまり、この系は低周波成分を通過させるフィルターであると考えられるので、このようなフィルターを**ローパスフィルター (low-pass filter)** と呼ぶ。

（高周波成分を遮断するフィルターとも考えられるので、ハイカットフィルターともいう）

また、逆にカットオフ周波数以上の周波数成分は通し、それ以下の周波数成分は遮断するようなフィルターを**ハイパスフィルター**（あるいはローカットフィルター）という。

ここで、 $\omega = \omega_c$ のときの *gain* を考えてみると、(C.11)に $\omega = \omega_c$ を代入して

$$gain = \frac{1}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega_c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tau^2 \cdot (1/\tau)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \left(\because \omega_c = \frac{1}{\tau} \right)$$

これは、*gain* の最大値（ $\omega = 0$ のとき $gain_{\max} = 1$ ）の $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍の値になっている。

つまり、カットオフ周波数は「***gain* の最大値の $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍になる周波数**」のことを意味している。（図 c-4 参照）

次に、カットオフ角周波数と時定数との関係を見てみよう。

C-5) で導出したように、カットオフ角周波数 ω_c と時定数 τ との関係は

$$\omega_c = \frac{1}{\tau}$$

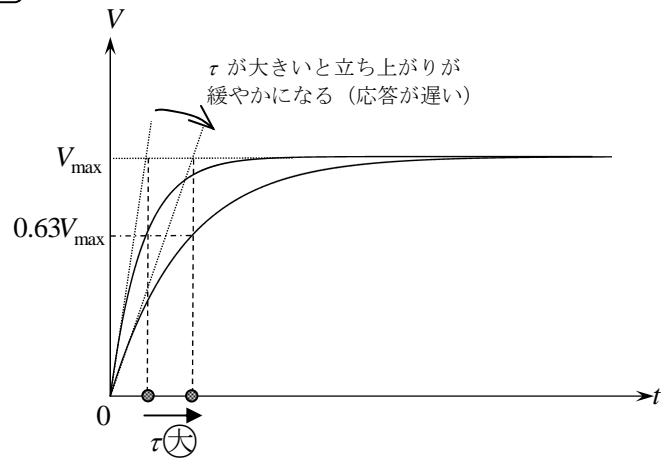
であった。これは、 τ が大きくなれば ω_c は減少し、逆に τ が小さくなれば ω_c が増大することを意味している。つまり、ローパスフィルターにおいては

τ が大 $\Rightarrow \omega_c$ が小 \Rightarrow 通過できる低周波領域が狭くなる（遮断する高周波領域が広がる）

τ が小 $\Rightarrow \omega_c$ が大 \Rightarrow 通過できる低周波領域が広がる（遮断する高周波領域が狭くなる）

という関係がある。

時間領域



周波数領域

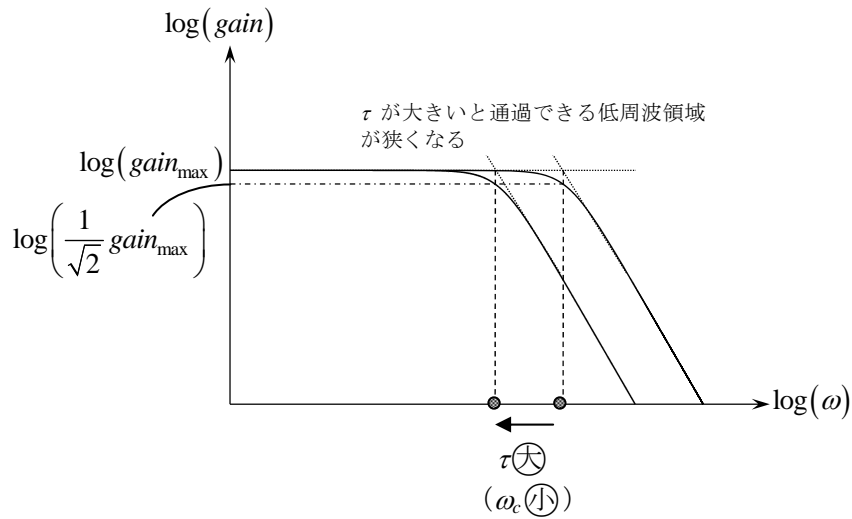
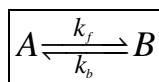


図 c-9

C-7) 単純な生化学反応における周波数応答の解析

では、ここまでの話を元に、以下のような単純な生化学反応において周波数応答の解析を行ってみよう。



(但し総和保存 $A+B=1$ が成り立つとする)

このとき微分方程式は $\dot{A} = \frac{dA}{dt}$ とおいて

$$\dot{A} = -k_f A + k_b (1 - A) \quad (\text{C.16})$$

と表わされる。

まずは練習も兼ねて式(C.16) の一般解を求めてみよう。

式(C.16) より

$$\frac{dA}{A - \frac{k_b}{k_f + k_b}} = -(k_f + k_b) dt$$

両辺を積分して

$$A - \frac{k_b}{k_f + k_b} = e^c \cdot e^{-(k_f + k_b)t}$$

$t=0$ のとき $A=1$ とすると $e^c = \frac{k_f}{k_f + k_b}$

$$\therefore A = \frac{k_b}{k_f + k_b} \left\{ 1 + \frac{k_f}{k_b} e^{-(k_f + k_b)t} \right\}$$

また $A+B=1$ より

$$B = \frac{k_f}{k_f + k_b} \left\{ 1 - e^{-(k_f + k_b)t} \right\}$$

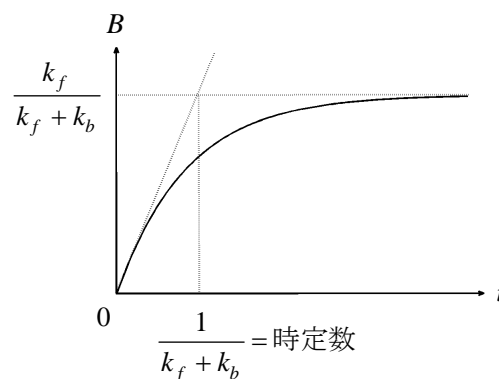
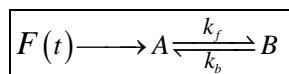


図 c-10

これより、この反応は C-1) で扱った 1 次反応のシステムと同じような挙動を示すことがわかる。

続いて周波数応答解析を行う。

まず、以下のように、システムに正弦波刺激 $F(t)$ を加えてみよう。



(入力があるので、総和保存は成り立たないことに注意！)

すると微分方程式は

$$\begin{cases} \dot{A} = -k_f A + k_b B + F(t) & \text{(C.17)} \\ \dot{B} = k_f A - k_b B & \text{(C.18)} \end{cases}$$

と書ける。

(C.17) + (C.18) より

$$\begin{aligned} \dot{A} + \dot{B} &= F & (F=0 \text{ ならば総和保存になる}) \\ \therefore \dot{A} &= F - \dot{B} & \text{(C.19)} \end{aligned}$$

また、(C.18) の両辺を t で微分すると、

$$\ddot{B} = k_f \dot{A} - k_b \dot{B} \quad \text{(C.20)}$$

(C.19) を(C.20) に代入すると

$$\ddot{B} + (k_f + k_b) \dot{B} = k_f F \quad \text{(C.21)}$$

ここで、 $F = \hat{F}e^{i\omega t}$ 、 $B = \hat{B}e^{i\omega t}$ と複素数表示して式(C.21) へ代入すると

$$\begin{aligned} -\omega^2 \hat{B}e^{i\omega t} + (k_f + k_b)i\omega \hat{B}e^{i\omega t} &= k_f \hat{F}e^{i\omega t} \\ \therefore \frac{\hat{B}}{\hat{F}} &= \frac{k_f}{-\omega^2 + i\omega(k_f + k_b)} \end{aligned}$$

gain を求めると

$$\left| \frac{\hat{B}}{\hat{F}} \right|^2 = \frac{k_f^2}{\{-\omega^2 + (k_f + k_b)i\omega\} \{-\omega^2 - (k_f + k_b)i\omega\}} = \frac{k_f^2}{\omega^4 + (k_f + k_b)^2 \omega^2}$$

よって

$$\begin{aligned} \text{gain} &= \left| \frac{\hat{B}}{\hat{F}} \right| = \frac{k_f}{\sqrt{\omega^4 + (k_f + k_b)^2 \omega^2}} \\ &= \frac{k_f}{\omega \sqrt{\omega^2 + (k_f + k_b)^2}} \end{aligned} \quad \text{(C.22)}$$

これを図示すると図 c-11(上) のようになる。

一方、両対数で書くと図 c-11 (下) のようになり、このとき

$$\omega^2 \gg (k_f + k_b)^2 \text{ で } \text{gain} = \frac{k_f}{\omega^2} \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\omega^2 \ll (k_f + k_b)^2 \text{ で } \text{gain} = \frac{k_f}{\omega(k_f + k_b)} \quad \dots \textcircled{4}$$

③,④の交点を求めると、

$$\frac{k_f}{\omega_c^2} = \frac{k_f}{\omega_c(k_f + k_b)}$$

$$\therefore \omega_c = k_f + k_b$$

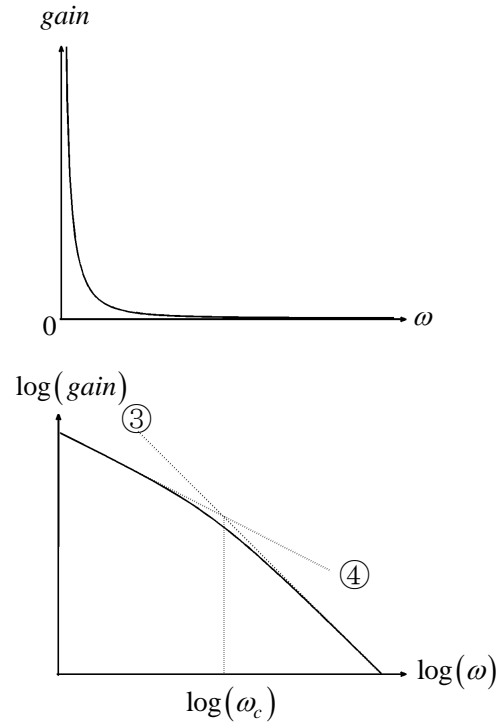


図 c-11